

УДК 62-233.3/9

## РАСЧЕТ БОКОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ЗУБЬЕВ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗУБЧАТЫХ КОЛЕС ОРТОГОНАЛЬНЫХ ГИПЕРБОЛОИДНЫХ ПЕРЕДАЧ

**Абзалов А.Р., Иванова В.Н., Яруллина Д.Е.**

*ГОУ ВПО «Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева», Казань, e-mail: kai@kai.ru*

Предлагается подход к расчету боковых поверхностей зубьев гиперболоидных передач, который может быть реализован как в электронных таблицах, так и путем непосредственного моделирования кинематики формообразования в современных САД/САЕ системах. В качестве образующей используется отрезок прямой, заданный в нормальной к линии пересечения делительных гиперболоидов плоскости, проходящей через горловые сечения. Рассматривается частный случай скрещивания осей вращения зубчатых колес, участвующих в зацеплении под прямым углом. При таком относительном положении можно рассчитать и смоделировать поверхности по линиям сечений, не рассчитывая винтовые направляющие линии. Результат расчета используется для построения трехмерных моделей сопряженных боковых поверхностей зубьев, работающих в паре гиперболоидных зубчатых колес. Расчет каждой половины боковой поверхности каждого зубчатого колеса осуществляется по отдельному алгоритму. Геометрические модели могут использоваться для разработки технологий изготовления зубчатых колес на основе использования станков с ЧПУ, а также «печатания» деталей на 3D принтерах.

**Ключевые слова:** гиперболоидная зубчатая передача, винтовая линия, сопряженные поверхности, передаточное отношение

## HYPERBOLOID ORTOGONAL GEARS SURFACES CALCULATING AND GEAR WHEELS MODELING

**Abzalov A.R., Ivanova V.N., Yarullina D.E.**

*Kazan State National Research University n.a. A.N. Tupolev, Kazan, e-mail: kai@kai.ru*

An approach of orthogonal hyperboloid gear wheels teeth surfaces calculation and modelling is presented. This method is applicable as well as using spreadsheets and directly simulate the traces of a line while it moves according to laws of movement relative rotation axis of gear wheels and relative movement of one of axis relative another in modern CAD/CAE. The initial position of a line is on a plane normal to intersection line of middle hyperboloids. To model the teeth surfaces in our case it is not necessary to calculate helix lines, to build the surface it is enough to calculate a set of section lines. The result of calculation is applied for modeling teeth surfaces or orthogonal hyperboloid gear wheels couples. For every half of a surface of every gear wheel one calculating algorithm is used. Gear wheels manufacturing technologies could be designed by using 3-D models applying as well NC-machines, and prototyping equipment.

**Keywords:** hyperboloid gear box, spiral, contacting surfaces of hyperboloid, gear wheels

В современных конструкциях механических передач гиперболоидные передачи не нашли широкого применения. Это обусловлено в первую очередь тем, что изготовление гиперболоидных зубчатых колес представляет собой трудную технологическую задачу. Однако ряд конструктивных преимуществ позволяет найти им сферу применения, несмотря на существенно большие затраты на изготовление по сравнению с другими типами передач. В частности, в отличие от гипоидных передач, гиперболоидные позволяют передавать одинаковую мощность как в прямом, так и в реверсном направлении. В отличие от червячных передач, гиперболоидные могут иметь передаточные отношения в диапазоне от 0,2 до 5...10 (ограничения накладываются при оценке величин потерь на трение и по удельным нагрузкам в диапазоне приемлемых скоростей скольжения). Коэффициент

полезного действия гиперболоидных передач оценивается в диапазоне до 0,96...0,98.

При моделировании боковой поверхности зубьев сопряженных гиперболоидных колес возможно использование подхода, позволяющего рассчитать гиперболоидные винтовые линии, заданные в сечениях делительного гиперболоида, гиперболоидов в основании и на вершине зуба. При моделировании с использованием сечения и трех направляющих. Для сопряженных колес согласованными винтовыми линиями будут линии, лежащие на делительных гиперболоидах. Уравнения этой линии, для обоих колес, работающих в паре, можно рассчитать кинематически, а также непосредственно смоделировать. В предположении, что делительные гиперболоиды колес образуются вращением линии  $n$  (рис. 1) вокруг каждой из перекрещивающихся осей колес передачи (на рисунке изображен один из гиперболоидов).

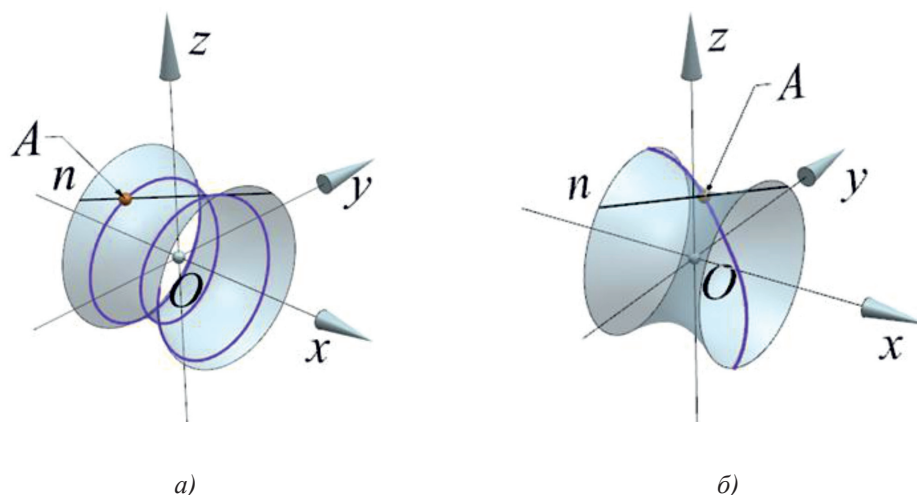


Рис. 1. Гиперboloидная винтовая линия при различных значениях скорости движения точки  $A$  вдоль линии  $n$ . Для а) скорость движения вдоль линии  $n$ , чем для б)

В предположении, что точка  $A$  движется по линии  $n$  со скоростью  $v(t)$ , перекрещивающейся с осью  $x$  под углом  $\beta$ , а сама линия, образующая гиперboloид, вращается вокруг оси  $x$  с угловой скоростью  $\omega(t)$ , уравнение винтовой линии примет вид [7]:

$$\begin{aligned} x &= \int_0^t v(t) \cos \beta dt ; \\ y &= R \cos \int_0^t \omega(t) dt - \int_0^t v(t) dt \sin \beta \sin \int_0^t \omega(t) dt ; (1) \\ z &= R \sin \int_0^t \omega(t) dt + \int_0^t v(t) dt \sin(\beta) \cos \int_0^t \omega(t) dt , \end{aligned}$$

где  $R$  – радиус гиперboloида в горловом сечении;  $\beta$  – угол перекрещивания оси  $x$  и линии  $n$ .

Для передачи, из условия равномерного вращения обоих колес пары, представляет интерес случай  $v = const$  и  $\omega = const$ . Варьируя  $v$  при заданном значении  $\omega$ , можно получать различные значения шага и, соответственно, угла подъема винтовой линии. Так как одна и та же точка  $A$  используется для расчета винтовых линий колес, работающих в паре, то эти винтовые линии будут использоваться для моделирования сопрягаемых боковых поверхностей зубьев. Моделирование боковых может осуществляться по сетке кривых: направляющими линиями будут винтовые линии, линиями сечений отрезки производящей линии [4]. Моделирование может осуществляться по сечениям в плоскостях, перпендикулярных оси вращения колеса [1, 3].

Для ортогональной передачи, при условии использования в качестве образующей отрезка прямой, заданной в нормальном сечении к боковой поверхности зуба, проведенном из горлового сечения, можно рассчитать частный вариант сопряженных боковых поверхностей зубчатых колес, работающих в паре, без расчета винтовой линии. В данном случае боковая поверхность зуба моделируется посечением и представляет собой линейчатую поверхность. Характер кривизны боковой поверхности зуба в горловом сечении меняется от вогнутой на выпуклую. Следовательно, расчет должен осуществляться для каждой половины боковой поверхности зуба по отдельному алгоритму, суть которых приводится ниже.

Осью вращения первого колеса является ось вращения  $O_1X_1$  (рис. 2). Осью вращения второго колеса является ось  $O_2Y_2$ . Для расчета половин зубьев первого и второго колес положим, что отрезок образующей  $AB$  вращается равномерно вокруг оси  $O_2Y_2$  с постоянной угловой скоростью  $\omega_2$  – относительное движение в системе координат  $O_2X_2Y_2Z_2$ . Данное движение можно задать для двух точек  $A$  и  $B$ , принадлежащих образующей:

$$\begin{aligned} \phi_2^A(t) &= \phi_2^A(0) + \omega_2 t ; \\ \phi_2^B(t) &= \phi_2^B(0) + \omega_2 t , \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\phi_2^A(t)$ ,  $\phi_2^B(t)$  – углы поворота точек  $A$  и  $B$  при равномерном вращении образующей вокруг оси  $Y_2$  в системе координат  $O_2X_2Y_2Z_2$ ,  $t$ -параметр (условно время) способный при-

нимать как положительные, так и отрицательные значения.

Система координат  $O_1X_1Y_1Z_1$  принята за неподвижную, и гиперboloидное колесо, осью вращения которой является ось  $O_1X_1$  примем за неподвижное и положим, что колесо, осью вращения которого является  $O_2Y_2$  вместе с системой координат  $O_2X_2Y_2Z_2$  равномерно вращается вокруг оси  $O_1X_1$  с угловой скоростью  $\omega_1 = \omega_2/i$ , где  $i$  – передаточное отношение, равное отношению диаметров гиперboloидов 1 к 2 в горловых сечениях. Это будет переносным движением.

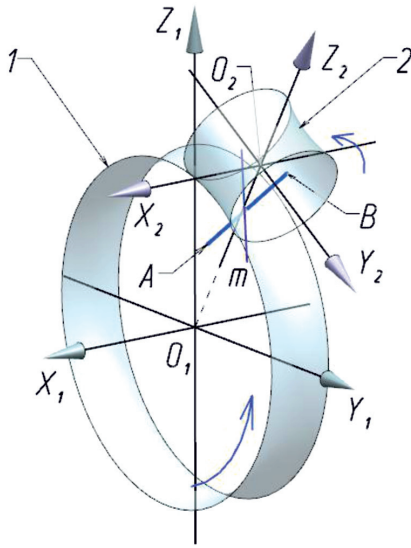


Рис. 2. К расчету боковой поверхности зуба гиперboloидного колеса.  $AB$  – «Образующая»;  $m$  – одна из двух линий пересечения делительных гиперboloидов; 1, 2 – делительные гиперboloиды колес, работающих в сопряжении

Траектории абсолютного движения рассчитываются отдельно для точки  $A$  и точки  $B$ , как векторные суммы относительных и переносных движений:

$$\begin{aligned} \mathbf{O}_1\mathbf{A} &= \mathbf{O}_1\mathbf{O}_2 + \mathbf{O}_2\mathbf{A}; \\ \mathbf{O}_1\mathbf{B} &= \mathbf{O}_1\mathbf{O}_2 + \mathbf{O}_2\mathbf{B}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\mathbf{O}_1\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{O}_1\mathbf{B}$  – радиус-векторы положений точек  $A$  и  $B$  в системе координат  $O_1X_1Y_1Z_1$ ,  $\mathbf{O}_1\mathbf{O}_2$  – радиус-вектор положения точки  $O_2$  в системе координат  $O_1X_1Y_1Z_1$ ,  $\mathbf{O}_2\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{O}_2\mathbf{B}$  – радиус-векторы положений точек  $A$  и  $B$  в системе координат  $O_2X_2Y_2Z_2$ . Расчет проводится для четырех половин двух поверхностей, работающих в сопряжении. Рассмотрим методику расчета для одной второй боковой поверхности зуба колеса 1.

Колесо 1 предполагается неподвижным, система координат  $O_1X_1Y_1Z_1$  жестко с ним связана. Колесо 2 равномерно вращается вокруг оси  $O_1X_1$  угловой скоростью  $\omega_1$  таким образом, что ось  $O_2Z_2$  совпадает с вектором  $\mathbf{O}_1\mathbf{O}_2$ . Ось  $O_2X_2$  параллельна оси  $O_1X_1$ . Отрезок  $AB$  равномерно вращается вокруг оси  $O_2Y_2$  с угловой скоростью  $\omega_2 = \omega_1/i$ , где  $i$  – передаточное отношение, равное отношению делительных диаметров в горловом сечении второго колеса к первому. Начальное положение точек  $A$  и  $B$  задается в плоскости, перпендикулярной линии пересечения делительных гиперboloидов и проходящей через горловые сечения, координаты точек зависят от выбранного угла зацепления. Данному положению точек  $A, B$  образующей будет соответствовать нулевое значение параметра  $t$ . С учетом того, что положение образующей, равномерно вращающейся вокруг оси  $O_2Y_2$ , координаты точек  $A$  и  $B$  в системе координат  $O_2X_2Y_2Z_2$  будут определяться:

$$\begin{aligned} x_2^A(t) &= \cos(\phi_2^A(0) + \omega_2 t), \\ z_2^A(t) &= \sin(\phi_2^A(0) + \omega_2 t), \\ y_2^A(t) &= y_2^A(0); \\ x_2^B(t) &= \cos(\phi_2^B(0) + \omega_2 t), \\ z_2^B(t) &= \sin(\phi_2^B(0) + \omega_2 t), \\ y_2^B(t) &= y_2^B(0). \end{aligned}$$

Орт-векторы системы координат  $O_2X_2Y_2Z_2$ , необходимо определить через орт-векторы системы координат  $O_1X_1Y_1Z_1$  в зависимости от значения параметра  $t$ :

$$i_2 = i_1,$$

$$j_2 = j_1 \sin(\phi_0 + \omega_1(t)) - k_1 \cos(\phi_0 + \omega_1(t)),$$

$$k_2 = j_1 \cos(\phi_0 + \omega_1(t)) + k_1 \sin(\phi_0 + \omega_1(t)).$$

При подстановке данных выражений в уравнения (3) можем рассчитать положение образующей, зависящей от значения параметра  $t$ . При изменении  $t$  от нуля в положительном направлении получим положение сечения для половины боковой поверхности первого зубчатого колеса. Если изменять  $t$  от нуля в отрицательном направлении, получим половину боковой поверхности второго зубчатого колеса.

Затем необходимо принять колесо 2 с системой координат  $O_2X_2Y_2Z_2$  за неподвижное, а первое вместе с системой координат  $O_1X_1Y_1Z_1$ , вращающимся вокруг оси  $O_2Y_2$  с постоянной угловой скоростью  $\omega_2$ , таким

образом, что ось  $O_1Z_1$  будет совпадать по направлению с отрезком  $O_1O_2$ . Отрезок  $AB$  принять равномерно вращающимся с угловой скоростью  $\omega_1$  вокруг оси  $O_1X_1$ . В этом случае также рассчитать траектории движения точек  $A$  и  $B$  как векторные суммы относительных и переносных движений. В этом случае получим вторые половины боковых поверхностей зубьев для обоих зубчатых колес.

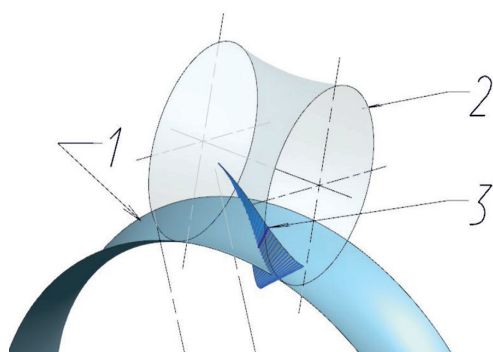


Рис. 3. Моделирование боковой поверхности зуба гиперболического колеса по «кривым» сечений: 1 – делительный гиперболический конус, для которого моделируется боковая поверхность зуба; 2 – делительный гиперболический конус сопряженного колеса; 3 – боковая поверхность зуба колеса 1

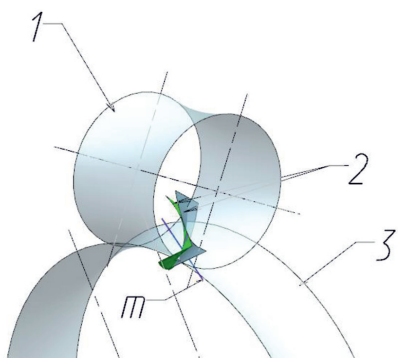


Рис. 4. Совмещенные поверхности зубьев, участвующих в зацеплении. 1 – делительный гиперболический конус ведущего колеса; 2 – сопряженные боковые поверхности зубьев; 3 – делительный гиперболический конус ведомого колеса

Полученные совокупности координат точек образующих позволяют смоделировать боковую поверхность зуба гиперболического зубчатого колеса (рис. 3). Одновременно в результате расчета получаем также координаты образующей, для моделирования боковой поверхности зуба сопряженного колеса (рис. 4). При этом с учетом необходимых коррекций обра-

зующей линии [6] могут быть получены уравнения координат точек модифицированных образующих линий.

Данную кинематику формообразования можно непосредственно реализовать в компьютерной среде моделирования механизмов, например в среде «Симуляция кинематических механизмов» системы NX.

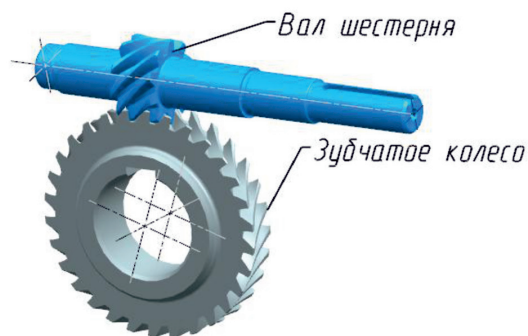


Рис. 5. Гиперболические зубчатые колеса, работающие в паре

В результате расчета боковых поверхностей зубьев получаем поверхности, гарантированно перекрывающие область между поверхностями вращения, образованными ножкой и вершиной зубьев. По аналогии с эвольвентными зубчатыми колесами используем соотношения: головка зуба равна модулю  $t$ , ножка зуба равна  $1,25t$  в любом сечении, перпендикулярном оси вращения рассматриваемого колеса. При этом, так как зубчатый венец моделируется на гиперболическом конусе вращения, то в горловом сечении модуль будет минимальным. Наличие двух поверхностей зуба, либо впадины, позволяет моделировать зубчатый венец. Остальные элементы геометрии зубчатых колес гиперболической передачи моделируются с учетом требований конструкции, как, например, рис. 5.

Наличие геометрических моделей позволяет изготавливать опытные образцы гиперболических зубчатых колес на пятикоординатных станках с ЧПУ [5], либо выращивать данные детали методами аддитивных технологий. Были предложены также методы изготовления гиперболических зубчатых колес на зубообрабатывающих станках [2].

#### Список литературы

1. Витренко В.А., Воронцов Б.С., Кириченко С.Г. Поверхностное моделирование гиперболических инструментов в системе PowerSHAPE // Сборник научных трудов «Вестник НТУ «ХПИ»: Проблемы механики привода № 29 – Вестник НТУ «ХПИ», 2011.

2. Кириченко С.Г. Изготовление гиперболических зубчатых колес и фрез на однополостных гиперболических. Вестник национального технического университета «ХПИ», № 29 (1072) 2014 Харьков, НТУ «ХПИ», 2014.

3. Матвеев Г.А., Печенкин В.М. Уравнения боковых поверхностей гиперболических зубчатых колес. - в кн.: Повышение надежности и долговечности деталей и узлов двигателей летательных аппаратов. - Казань: Труды Казанского авиационного института, 1975. - вып. 183. - С. 24-33.

4. Печенкин М.В., Абзалов А.Р. Расчет положения производящих линий при формообразовании боковой поверхности зубьев гиперболической передачи // Современные проблемы науки и образования. - 2014. - № 6; URL: <http://www.science-education.ru/120-16410>.

5. Печенкин М.В., Абзалов А.Р. Кинематика формообразования боковой поверхности зубьев гиперболической передачи концевым инструментом // Фундаментальные исследования. - 2014. - № 12-11. - С. 2310-2314.

6. Печенкин М.В. Профильная модификация зубьев гиперболической передачи // Вестник Казанского государственного технического университета им. А.Н. Туполева. - 2007. - № 2. - С. 29-32.

7. Севрюк В.Н. Теория круговинтовых поверхностей в проектировании передач Новикова. - Издательство Харьковского университета, 1972. - 169 с.

### References

1. Vitrenko V.A., Voroncov B.S., Kirichenko S.G. Pov-  
erhnostnoe modelirovanie giperboloidnyh instrumentov v sis-

teme PowerSHAPE // Sbornik nauchnyh trudov «Vestnik NTU «HPI»: Problemimehanichnogo privodu no. 29 Vestnik NTU «HPI», 2011.

2. Kirichenko S.G. Izgotovlenie giperboloidnyh zubchatykh koles i frez na odnopolostnykh giperboloidah. Vestnik nacionalnogo tehniceskogo universiteta «HPI», no. 29 (1072) 2014 Harkov, NTU «HPI», 2014.

3. Matveev G.A., Pechenkin V.M. Uravneniya bokovykh poverhnostej giperboloidnykh zubchatykh koljos. v kn.: Povyshenie nadjozhnosti i dolgovechnosti detalej i uzlov dvigatelej letatelnykh apparatov. Kazan: Trudy Kazanskogo aviacionnogo instituta, 1975. vyp. 183. pp. 24-33.

4. Pechenkin M.V., Abzalov A.R. Raschet polozhenija proizvodjashhih linij pri formoobrazovanii bokovoj poverhnosti zubev giperboloidnoj peredachi // Sovremennye problemy nauki i obrazovanija. 2014. no. 6; URL: <http://www.science-education.ru/120-16410>.

5. Pechenkin M.V., Abzalov A.R. Kinematika formoobrazovanija bokovoj poverhnosti zubev giperboloidnoj peredachi koncevym instrumentom // Fundamentalnye issledovanija. 2014. no. 12-11. pp. 2310-2314.

6. Pechenkin M.V. Profilnaja modifikacija zubev giperboloidnoj peredachi // Vestnik Kazanskogo gosudarstvennogo tehniceskogo universiteta im. A.N. Tupoleva. 2007. no. 2. pp. 29-32.

7. Sevrjuk V.N. Teorija krugovintovykh poverhnostej v proektirovanii peredach Novikova. Izdatelstvo Harkovskogo universiteta, 1972. 169 p.