Школьный этап всероссийской олимпиады школьников по математике.

2019-2020 год.

***Продолжительность олимпиады 120 минут***

8 класс

**После каждой задачи приведены критерии, которые необходимо использовать при проверке. Если решение школьника не подходит под описанные критерии, следует воспользоваться общими критериями:**

7б Полное верное решение.
6б-7б Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5б-6б Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4б Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2б-3б Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
1б Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0б Решение неверное, продвижения отсутствуют.

**Если два и более человека сделали одинаковые ошибки или написали одинаковые верные рассуждения, то они должны получить одинаковое количество баллов.**

**1.** В числовом выражении некоторые цифры заменили буквами (разные цифры — разными буквами, одинаковые цифры — одинаковыми буквами). Получилось следующее:

$$\overline{2019A} : \overline{B0A} = \overline{AA}.$$

Какое числовое выражение было записано изначально? (Достаточно привести пример. $\overline{2019A}$ изначально было пятизначным числом, а $\overline{B0A}$ - трехзначным.)

**Ответ**: 20196 : 306 = 66.
**Замечание**. Других примеров не бывает.
**Критерии**: 7 б. Приведён верный пример.

**2.** Караванщик Али имеет меньше ста верблюдов. Он решил написать завещание. Старший сын получит треть стада. Второму достанется четверть стада, третьему – пятая часть стада. Сколько верблюдов достанется младшему четвертому сыну?
**Ответ**: 13.
**Решение**. Чтобы Али мог отдать треть стада старшему, общее количество верблюдов должно делиться на 3. Также, поскольку он отдал четверть второму, а пятую часть третьему, общее количество верблюдов должно делиться на 4 и на 5. Таким образом, количество подарков должно делиться на НОК(3, 4, 5) = 60. По условию задачи количество верблюдов меньше ста, поэтому их может быть только 60. Тогда старшему он завещал 60 : 3 = 20 верблюдов, второму — 60 : 4 = 15 подарков, а третьему — 60 : 5

= 12 подарков. Таким образом, четвертому он завещал 60 − 20 − 15 − 12 = 13 верблюдов.
**Критерии**:
1 б. Только верный ответ без обоснования. (Ответ в виде доли, то есть 13/60 , тоже засчитывается.)
5 б. Верное рассуждение, но присутствуют арифметические ошибки.
7 б. Приведён верный ответ и обоснование.
К любому из последующих пунктов при наличии верного ответа добавляется 1 балл.
1 б. Доказана делимость общего количества подарков на 2, 5 или 7, но дальнейших продвижений нет.
4 б. Доказано, что число подарков должно делиться на 60.

**3.** Флорист Стёпа решил посадить вдоль забора 25 цветов – ирисы и маки. Стёпа считает нельзя сажать два мака подряд и рядом с каждым ирисом должен быть посажен ещё хотя бы один ирис. Стёпа посадил 9 маков. Мог ли тринадцатый цветок оказаться ирисом?

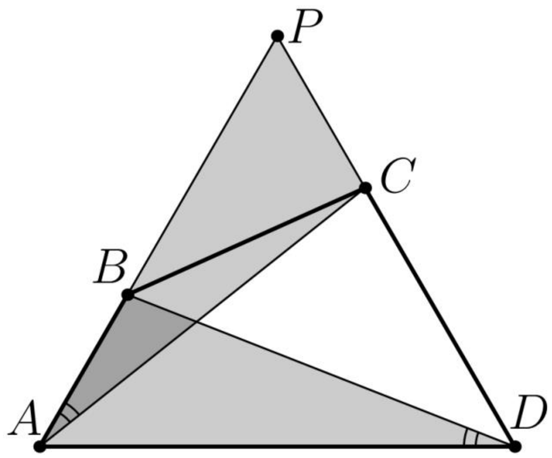
**Ответ**: нет, не мог.

**Решение**. Поскольку никакие два мака не посажены рядом, каждый мак растет между двумя ирисами. Таким образом, весь ряд представляет собой «группы» подряд растущих ирисов, причём между соседними группами ирисов растет ровно один мак. По условию рядом с каждым ирисом ещё один ирис, поэтому в каждой группе находятся хотя бы 2 ириса. А так как всего маков 9, то групп ирисов хотя бы 8. Получается, что всего цветов хотя бы 9 + 2 · 8 = 25. Но их ровно 25, значит, групп ирисов ровно 8, и в каждой группе ровно 2 цветка. Тогда рассадка цветов восстанавливается однозначно, и на тринадцатом месте посажен мак.
**Критерии**:
0 б. Только верный ответ без обоснования.
3 б. Указана верная рассадка цветов, но нет обоснования, что других рассадок не существует.
7 б. Приведён верный ответ и обоснование.

**4**. Докажите, что выражение 1009! · 1010! · 2019! · 2020! не является квадратом натурального числа. ( по определению n! = 1 · 2 · 3 · . . . · n.)
**Решение**. Заметим, что $1009!\cdot 1010! = (1009!)^2\cdot 1010$. Аналогично получаем, что $2019!\cdot 2020! = (2019!)^2\cdot 2020$. Таким образом, $1009!\cdot 1010!\cdot 2019!\cdot 2020! = (1009!)^2\cdot(2019!)^2\cdot 1010\cdot 2020 = (1009!\cdot 2019!\cdot 1010)^2\cdot 2$. Последнее выражение не является квадратом, так как имеет вид $2a^2$.

**Критерии**: 7 б. Приведено полное обоснование. За отсутствие доказательства того факта, что квадрат натурального числа не может быть в два раза больше другого квадрата натурального числа, баллы не снимаются.

**5**. Известно, что в выпуклый четырёхугольник ABCD таков, что $\angle BAC = \angle BDA$ и $\angle BAD = \angle ADC = 60^\circ$. Найдите длину AB, если известно, что AD = 20, CD = 6.
**Ответ**: 14.




**Решение**. Продлим AB и CD до пересечения в точке P. Из равенства $\angle PAD = \angle ADP = 60^\circ$ следует, что треугольник ADP является равносторонним. Треугольник APC равен треугольнику DAB, так как AP = AB, $\angle APC = 60^\circ = \angle DAB$ и $\angle PAC = \angle ADB$. Следовательно, PD=AD=20, AB=PC = PD-CD=20-6=14.

**Критерии**:
0 б. Только верный ответ без обоснования.
1 б. Присутствует дополнительное построение до равностороннего треугольника APD, но дальнейших продвижений нет.
4 б. Найдена пара равных треугольников, приводящих к решению задачи, но решение не доведено до конца. 7 б. Приведён верный ответ и обоснование.

Школьный этап всероссийской олимпиады школьников по математике.

2019-20 год.

***Продолжительность олимпиады 120 минут***

9 класс

**После каждой задачи приведены критерии, которые необходимо использовать при проверке. Если решение школьника не подходит под описанные критерии, следует воспользоваться общими критериями:**

7б Полное верное решение.
6б-7б Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5б-6б Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4б Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2б-3б Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
1б Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0б Решение неверное, продвижения отсутствуют.

**Если два и более человека сделали одинаковые ошибки или написали одинаковые верные рассуждения, то они должны получить одинаковое количество баллов.**

**1.** Караванщик Али имеет меньше ста верблюдов. Он решил написать завещание. Старший сын получит половину стада. Второму достанется четверть часть стада, третьему – пятнадцатая часть стада. Сколько верблюдов достанется младшему четвертому сыну?

**Ответ**: 11.

**Решение**. Чтобы Али мог оставить половину стада старшему, общее количество верблюдов должно делиться на 2. Также, поскольку он завещал четверть второму, а пятнадцатую часть третьему, общее количество верблюдов должно делиться на 4 и на 15. Таким образом, количество подарков должно делиться на НОК(2,4,15) = 60. По условию задачи количество верблюдов меньше ста, поэтому их может быть только 60. Тогда старшему он завещал 60 : 2 = 30 верблюдов, второму — 60 : 4 = 15 подарков, а третьему — 60 : 15 = 4 подарков. Таким образом, четвертому он завещал 60 − 30 − 15 − 4 = 11 верблюдов.

**Критерии**:

1 б. Только верный ответ без обоснования. (Ответ в виде доли, то есть 13/60 , тоже засчитывается.)

5 б. Верное рассуждение, но присутствуют арифметические ошибки.

7 б. Приведён верный ответ и обоснование.

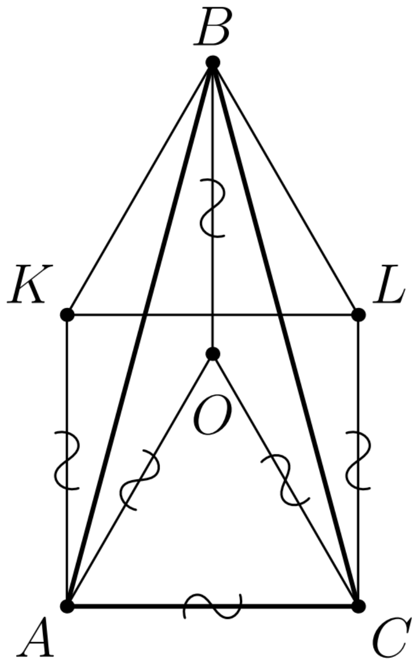
К любому из последующих пунктов при наличии верного ответа добавляется 1 балл.

1 б. Доказана делимость общего количества подарков на 2, 5 или 7, но дальнейших продвижений нет.

3 б. Доказано, что число подарков должно делиться на 60.

**2.** На стороне KL квадрата ACLK во внешнюю сторону построен равносторонний треугольник KLB. Докажите, что радиус описанной окружности треугольника ABC равен основанию AC.

**Решение**. Построим равносторонний треугольник AOC внутри квадрата.




Заметим, что OC=AO=AK=KL=KB и AO∥KB. Тогда AKBO – параллелограмм и AK=BO. Следовательно, O – центр описанной окружности и AO=AC, что и требовалось доказать.

**Критерии:**

3 б. Доказано, что OBLC — параллелограмм, но дальнейших продвижений нет.

7 б. Верное решение.

**3.** Корни квадратного уравнения $2019x^2 + ax + b = 0$ — целые числа. Докажите, что дискриминант этого уравнения делится на $2019^2$ .

**Решение**. Пусть $D$ — дискриминант этого уравнения. Обозначим корни уравнения через $x_1 = \frac{-a-\sqrt{D}}{4038}$ и $x_1 = \frac{-a+\sqrt{D}}{4038}$ . Тогда $x_2 - x_1 = \frac{\sqrt{D}}{2019} = n$ — целое число. Таким образом, $D = 2019^2 \cdot n^2$ , что делится на $2019^2$ .

**Критерии**:

3 б. Получено выражение для разности корней через дискриминант, но дальнейших продвижений нет.

7 б. Приведено верное доказательство.

**4.** Сколько существует пар натуральных чисел a и b таких, что НОК(a, b) = НОД(a, b) + 17. Напоминаем, что НОД(a, b) — это наибольший общий делитель, то есть наибольшее натуральное число, делящее и a, и b. НОК(a, b) — это наименьшее общее кратное, то есть наименьшее натуральное число, кратное и a, и b.

**Ответ**: 6

**Решение**. Пусть $d$ = НОД($a$, $b$). Заметим, что и НОК, и НОД делятся на $d$, а значит, и 23 делится на $d$. Поскольку 23 простое, получаем, что $d = 1$ или $d = 17$.

Если $d = 1$, то числа $a$ и $b$ взаимно просты, и НОК($a$, $b$) = $a \cdot b = 1+17 = 18$. Это дает варианты (1, 18), (18, 1), (9, 2), (2, 9).

Если $d = 17$, то НОК($a$, $b$) = 17 + 17 = 34. Это означает, что $a = 17$, $b = 34$ или $a = 34$, $b = 17$.

Всего вариантов ответов 6: ($a$, $b$) = (1, 18),(18, 1),(9, 2),(2, 9),(17, 34),(34, 17).

**Критерии**:

2 б. Приведён верный ответ.

3 б. Рассмотрен только один из случаев $d = 1$ или $d = 17$.

7 б. Приведён верный ответ и обоснование.

Если в любом из перечисленных случаев пропущены симметричные случаи снимается 1 балл.

**5.** Вдоль автотрассы М7 расположены 40 кафе. Хозяин каждой из них посчитал сумму расстояний до оставшихся заведений. Возможно ли такое, что у всех получились различные числа?

**Ответ**: Невозможно.

**Решение**. Занумеруем закусочные последовательно числами от 1 до 40. Докажем, что числа, полученные в кафе с номерами 20 и 21, совпадают.

Разобьём оставшиеся кафе на пары вида $k$ и $k + 21$: 1 и 22, 2 и 23, . . . , 19 и 40. Заметим, что сумма расстояний как от кафе 20, так и от кафе 21, до заведений одной пары $k$ и $k + 21$ равна расстоянию между кафе $k$ и $k + 21$. Поскольку число в заведениях 20 и 21 равно сумме расстояний до заведений всех 19 пар и расстояния между кафе 20 и 21, то числа у хозяев заведений 20 и 21 совпадают.

**Критерии**.

7 баллов - Любое верное решение.

2 балла - Утверждается, но не доказывается, что равны числа, написанные в двух средних кафе (в 20 и 21)

0 баллов - На примере частных случаев показано, что обязательно найдутся равные числа.

0 баллов - Приведён только верный ответ.

Школьный этап всероссийской олимпиады школьников по математике.
2019-20 год.

***Продолжительность олимпиады 120 минут***

10 класс

**После каждой задачи приведены критерии, которые необходимо использовать при проверке. Если решение школьника не подходит под описанные критерии, следует воспользоваться общими критериями:**

7б Полное верное решение.
6б-7б Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5б-6б Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4б Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2б-3б Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
1б Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0б Решение неверное, продвижения отсутствуют.

**Если два и более человека сделали одинаковые ошибки или написали одинаковые верные рассуждения, то они должны получить одинаковое количество баллов.**

**1.** Равиль сбегает с пятого этажа на первый на 2 секунды быстрее, чем Марк едет на лифте. Марк едет на лифте с пятого этажа на первый на 2 секунды быстрее, чем Равиль сбегает с шестого этажа на первый. За сколько секунд Равиль сбегает с пятого этажа на первый? (Длины пролетов лестницы между всеми этажами одинаковы).

**Ответ**. За 16 секунд.

**Решение**. Между первым и пятым этажами 4 пролета, а между шестым и первым – 5. Согласно условию, Равиль 5 пролетов пробегает на 2 секунды дольше, чем Марк едет на лифте, а 4 пролета – на 2 секунды быстрее Марка. Значит, за 4 секунды Равиль пробегает один пролет.

Тогда с пятого этажа на первый (т.е. 4 пролета) Равиль сбегает за $4\times4=16$ секунд.

**Критерии**.

7 баллов – Верный ответ с полным решением.

5 баллов – Объяснено, что на один пролет требуется 4 секунды, в ответе указано 4 секунды.

3 балла – Верное обоснование в предположении, что путь с пятого этажа на первый в 1,25 раз больше пути с четвертого этажа на первый и ответ 16 секунд.

0 баллов – Только ответ .

**2.** На столе лежат фишки пронумерованные от 1 до 55. Можно ли разложить их на 13 кучек так, чтобы в каждой группе произведение чисел на фишках делилось на 9?

**Ответ**: нет.

**Решение**. Предположим противное: пусть фишки можно разложить по тринадцати кучкам так, чтобы выполнялось условие. Для того чтобы произведение чисел на фишках в некоторой группе делилось на 9, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено одно из двух условий:

- среди чисел на фишках в этой группе есть хотя бы одно, кратное 9;
- среди чисел на фишках в этой группе есть хотя бы два, кратных 3.

Из чисел от 1 до 55 ровно шесть кратны 9 (это числа 9, 18, 27, 36, 45, 54). Значит, хотя бы семь групп не содержат чисел, кратных 9. Эти группы должны содержать как минимум по два числа, кратных 3, но не кратных 9. Тогда всего чисел, кратных 3, но не кратных 9, должно быть не менее 14. Но в промежутке от 1 до 60 ровно 12 таких чисел (3, 6, 12, 15, 21, 24, 30, 33, 39, 42, 48, 51). Противоречие.

**Критерии**:

0 б. Только ответ без доказательства.

2 б. В работе присутствует наблюдение, что среди чисел в группе должно быть одно, кратное 9, или два, кратных 3, но дальнейших продвижений нет.

4 б. Идейно верное решение, неправильно построенное логически. Приведём эскиз такой потенциальной работы: «Чисел, кратных 9, ровно 6, их кладём в 6 мешков; остальных чисел, кратных 3, ровно 12, кладём их в 6 мешков по два. Итого 12 мешков, а надо 13. Значит, нельзя».

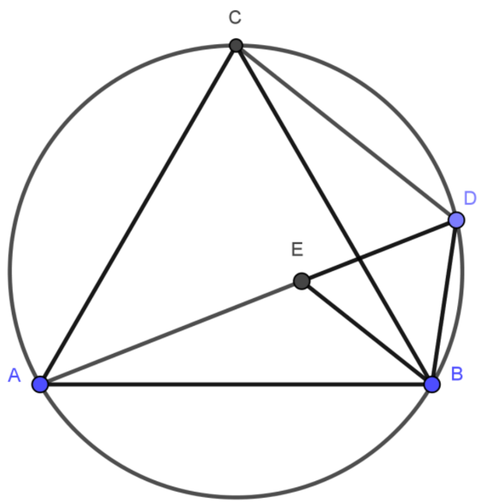
Правильно логически построенное решение должно приводить к противоречию любой потенциально возможный способ разложить числа; неправильно построенное решение опирается на конкретный способ раскладывать карточки по мешкам, который по каким-то причинам кажется автору оптимальным.

7 б. Любое полное верное решение.

**3.** Правильный треугольник ABC вписан в окружность ω. На меньшей дуге CB окружности ω выбрана произвольная точка D. Внутри треугольника отмечены такие точка E, что BDE — правильный треугольник. Найдите ∠AEB.

**Ответ**: 120◦.

**Решение**.




Докажем равенство треугольников BAE и BCD. Проверим, что выполнены условия первого признака равенства треугольников. Отрезки BA и BC равны как стороны правильного треугольника ABC, отрезки EB и DB равны как стороны правильного треугольника EBD. Далее, поскольку углы ABC и EBD исходных треугольников по 60◦,

можно записать

∠ABE = 60◦ − ∠EBC = ∠CBD .

Таким образом, треугольники BAE и BCD действительно равны. Следовательно, ∠AEB = ∠CDB. Но ∠CDB = 120◦, так как он вписанный и опирается на дугу BAC окружности ω, а мера этой дуги равна 240◦. Тогда ∠AEB = 120◦,что и требовалось найти.

**Критерии:**

0 б. Любое незаконченное или ошибочное счётное решение.

1 б. Только правильный ответ без доказательства.

1 б. В работе упомянуто возможное равенство треугольников BAE и BCD,

но не доказано или неправильно доказано; дальнейших продвижений нет.

3 б. В работе упомянуто возможное равенство треугольников BAE и BCD,

но не доказано или неправильно доказано; далее решение закончено и получен правильный ответ.

3 б. Доказано равенство треугольников BAE и BCD, но угол AEB не найден

или вычислен ошибочно.

4 б. Любое полное верное решение.

**4.** Уравнение $x^3 + 1 = ax$ имеет ровно два положительных корня, и отношение большего из них к меньшему равно 2019. Уравнение $x^3 + 1 = ax^2$ также имеет ровно два положительных корня. Докажите, что отношение большего из них к меньшему также равно 2019.

**Решение**. Обозначим положительные корни уравнения $x^3 + 1 = ax$ через $x_1$ и $x_2$. Тогда $x_1 : x_2 = 2019$. Подставим их в уравнение и поделим два получившихся равенства на ${x_1}^3$ и ${x_2}^3$:

$$ {x_1}^3 + 1 = ax_1 \;<=>\; 1 + \left(\frac{1}{x_1}\right)^3 = a\left(\frac{1}{x_1}\right)^2 $$

$$ {x_2}^3 + 1 = ax_2 \;<=>\; 1 + \left(\frac{1}{x_2}\right)^3 = a\left(\frac{1}{x_2}\right)^2 $$

Из формул видно, что $\frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{x_2}$ — положительные корни уравнения $x^3 + 1 = ax^2$.

По условию их ровно два, и надо найти отношение большего к меньшему. Ясно, что $\frac{1}{x_2} > \frac{1}{x_1}$. Тогда $\frac{1}{x_2} : \frac{1}{x_1} = x_1 : x_2 = 2019$.

**Критерии**

3 б. В работе отмечен тот факт, что при делении первого уравнения из условия

На $x^3$ и последующей замены $\frac{1}{x} \to x$ первое уравнение переходит во второе,

но никаких дальнейших продвижений нет.

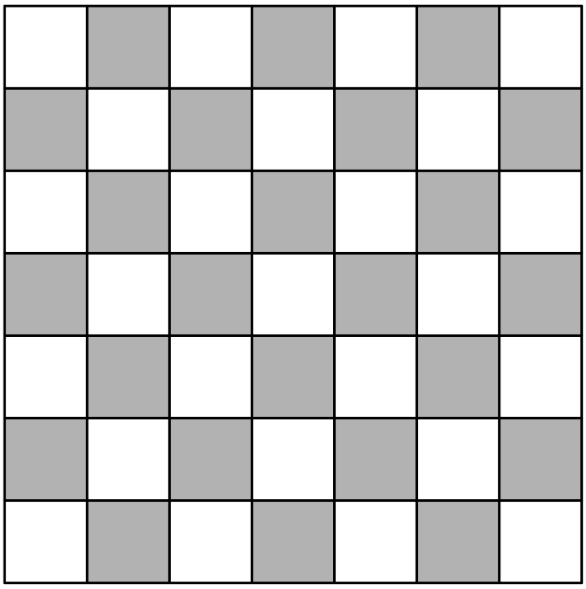
5 б. В работе доказано, что второе уравнение имеет положительные корни $\frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{x_2}$ ,

но отношение большего к меньшему найдено ошибочно (к примеру, перепутаны больший и меньший).

7 б. Любое полное верное решение.

**5.** Двое играют в «Захватчиков» на квадратном поле 7 × 7. Они поочерёдно захватывают клеточки : Первый — ставит крестик на любое поле, Второй — ставит два нолика на любые два соседних по стороне клетки. Если перед ходом Второго на поле не осталось ары соседних клеток, то все оставшиеся клетки достаются крестикам. Кто из игроков сможет «захватить» больше половины всей доски вне зависимости от действий соперника?

**Ответ**: Первый (крестики).



**Решение**. Раскрасим мысленно все клетки доски в два цвета в шахматном порядке. Получится 24 чёрные клетки и 25 белых клеток. Опишем явно одну из возможных стратегий Первого. На каждом ходу Первый будет захватывать какую-нибудь чёрную клетку. Заметим, что Второй каждым своим ходом захватывает ровно одну чёрную клетку (и ровно одну белую). Таким образом, после первых 12 пар ходов все чёрные клетки закончатся, Второй больше не сможет ходить и все оставшиеся клетки достанутся Первому. Всего за первые 12 своих ходов Второй заберет не более 24 клеток, что меньше половины всего поля, и больше он ничего не захватит. Следовательно, Первый, придерживаясь приведённой стратегии, захватит больше половины поля.

**Критерии**

0 б. Только правильный ответ.

0 б. Дана стратегия Первого, которая работает только против одной или нескольких возможных стратегий Второго. Обычно в таких работах необоснованно

полагают, что какие-то ходы Второго «выгоднее» других, и рассматривают только «выгодные» ходы. Сюда же относятся работы с неполнотой перебора возможных действий Второго.

1 б. В работе присутствует идея шахматной раскраски шоколадки, но дальнейших продвижений нет.

3 б. В работе описана правильная стратегия Первого, которая на самом деле работает против любых возможных действий Второго, но обоснования нет вовсе или в обосновании рассматриваются только одна или нескольких возможных стратегий Второго.

7 б. Любое полное верное решение. Типичное решение должно содержать описание стратегии Первого и обоснование, почему приведённая стратегия работает против любых возможных действий Второго.

Школьный этап всероссийской олимпиады школьников по математике.

2019-20 год.

***Продолжительность олимпиады 120 минут***

11 класс

**После каждой задачи приведены критерии, которые необходимо использовать при проверке. Если решение школьника не подходит под описанные критерии, следует воспользоваться общими критериями:**

7б Полное верное решение.

6б-7б Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.

5б-6б Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.

4б Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.

2б-3б Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.

1б Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).

0б Решение неверное, продвижения отсутствуют.

**Если два и более человека сделали одинаковые ошибки или написали одинаковые верные рассуждения, то они должны получить одинаковое количество баллов.**

**1.** Докажите, что уравнение $x^2 + 2^{2019}x + 2^{2021} = 0$ не имеет целых корней.

**Первое решение**. Дискриминант равен

$$D = 2^{4038} - 4 \cdot 2^{2021} = 2^{2023}(2^{2015} - 1).$$

Для наличия целого корня необходимо, чтобы дискриминант был точным квадратом. Однако, число $2^{2023}(2^{2015} - 1)$ не является точным квадратом, так как степень вхождения двойки в любой точный квадрат чётна.

**Второе решение**. Заметим, что при x = −4 левая часть уравнения положительна (равна 16), а при x = −5 отрицательна (равна $-2^{2021} + 25$). Значит, на промежутке (−5; −4) у уравнения есть корень; он, очевидно, нецелый. Так как по теореме Виета сумма корней нашего уравнения равна − $2^{2019}$, второй корень тоже нецелый.

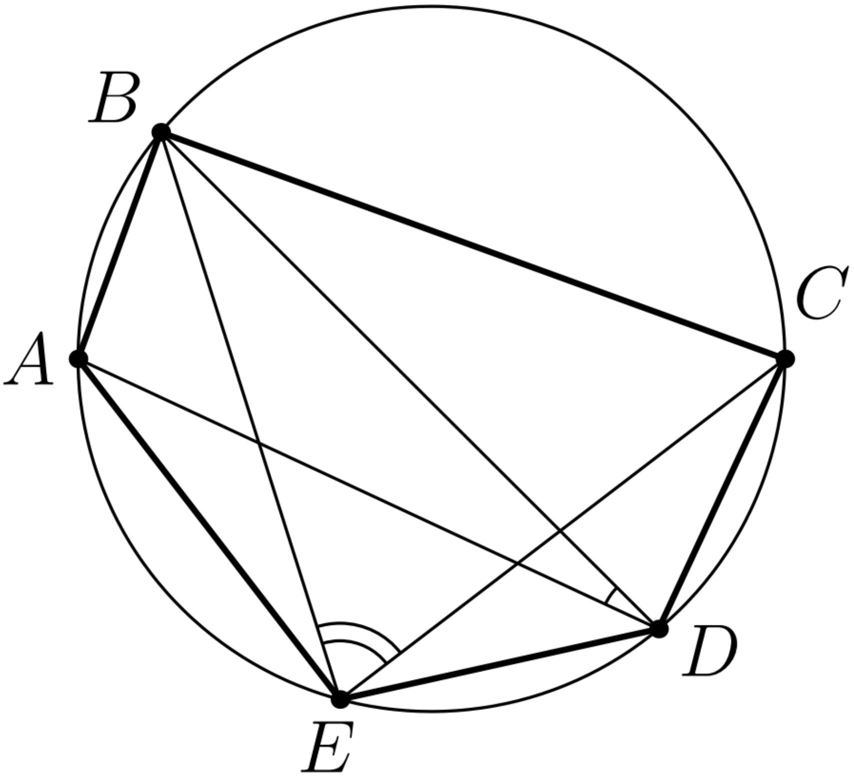
**Критерии**

7 б. Верное решение.

2 б. Дискриминант записан в виде произведения степени двойки на нечетное число.

**2.** В окружность вписан пятиугольник ABCDE с углами ∠ADB = 30◦ и ∠ABC=90◦. Найдите величину угла ∠BEC.

**Ответ**: 60◦.




**Решение**. Так как $\angle ADB = 30^\circ$, дуга AB равна $60^\circ$. Так как $\angle ABC=90^\circ$, дуга ABC равна $180^\circ$, то есть дуга BC равна $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$. Угол BEC опирается на дугу BC, а значит, он равен $120^\circ/2 = 60^\circ$.

**Критерии**

4 б. Верное решение.

0 б. Только правильный ответ.

**3**. На доске написано число ноль. Марату разрешается совершать следующие операции:

- применить к одному из написанных на доске чисел тригонометрическую ($sin, cos, tg$ или $ctg$) или обратную тригонометрическую ($arcsin, arccos,$ $arctg$ или $arcctg$) функцию и написать результат на доске;
- написать на доске частное или произведение двух уже написанных чисел.

Помогите Марату написать на доске $\sqrt{6}$.

**Решение**. Марат может, например, совершить следующие вычисления:

- $cos\,0 = 1;$
- $arctg\,1 = \frac{\pi}{4};$
- $arccos\,0 = \frac{\pi}{2};$
- $\frac{\pi}{4} : \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2};$
- $arccos\,\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3};$
- $tg\,\frac{\pi}{3} = \sqrt{3};$
- $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2};$

• $\sqrt{3}\ \cdot\ \frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$;

• $\frac{\sqrt{6}}{2}:\frac{1}{2}=\sqrt{6}$.

**Замечание**. К требуемому результату может приводить ещё много последовательностей операций.

**Критерии**

1 б. Получено число $\frac{\pi}{2}$ или $\frac{\pi}{4}$.

2 б. Получено число $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{4}$.

2 б. Получено число $\frac{1}{2}$.

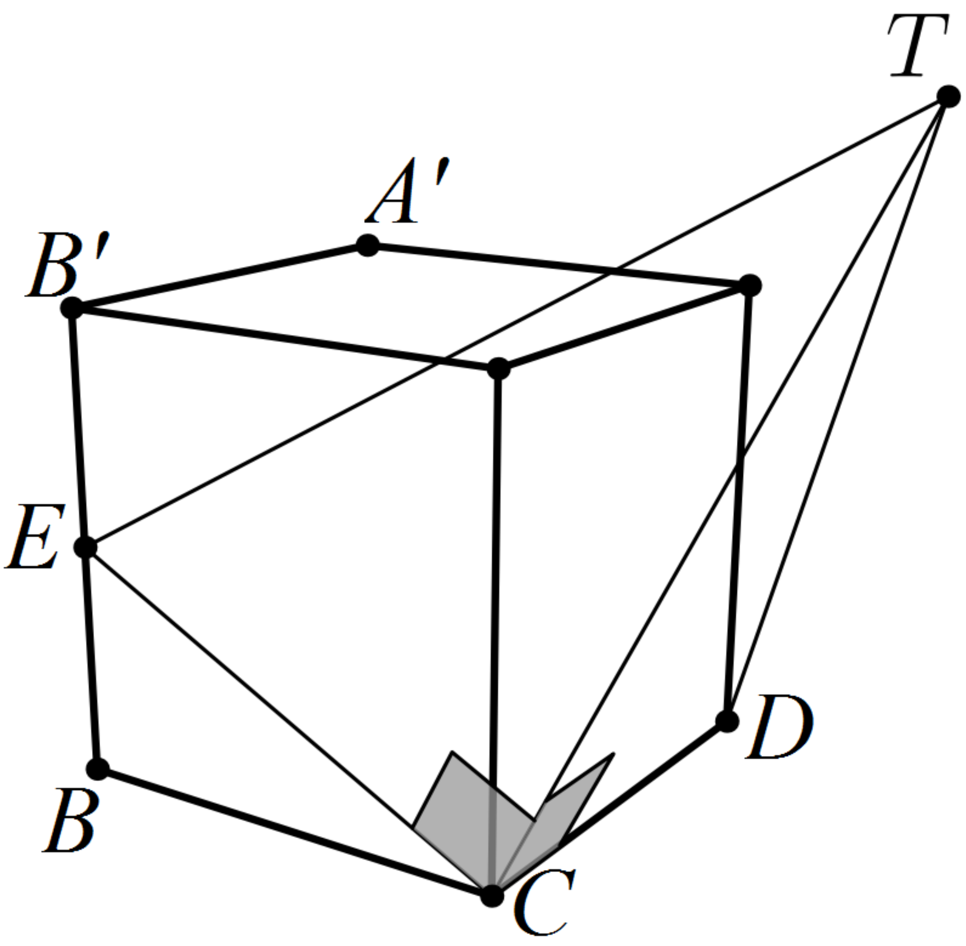
4 б. Получено число $\frac{\pi}{3}$ или $\frac{\pi}{6}$.

7 б. Верное решение.

Баллы не суммируются, ставится максимальный из предложенных.

**4.** На ребре $BB'$ куба $ABCDA'B'C'D'$ с ребром длины 2 отмечена точка $E$. В пространстве отмечена такая точка $T$, что $TC=\sqrt{13}$ и $TD=\sqrt{17}$. Найдите длину высоты тетраэдра $TECD$, опущенной из вершины $D$.

**Ответ**: 2.




**Решение**. Заметим, что $TC^2+DC^2=13+4=17=TD^2$.

Отсюда по обратной теореме Пифагора следует, что угол $TCD$ прямой. Следовательно, $TC \perp CD$, то есть $T$ лежит в плоскости грани $BB'CC'$. Значит, $CD$ является высотой, опущенной из вершины D, а её длина равна 2.

**Замечание**. Существуют два возможных расположения точки T, симметричных относительно плоскости ECD.

**Критерии**

7 б. Верное решение.

0 б. Только правильный ответ

**5.** В художественном наборе графа Дракулы есть 120 карандашей: белые, черные и красные. Известно, что если произвольным образом вытащить из набора 101 карандаш, то среди них обязательно найдутся три разноцветных. Какое наименьшее количество карандашей нужно достать из набора наугад, чтобы среди них точно было два разноцветных?

**Ответ**: 81.

**Решение**. Если среди 101 карандаша всегда найдется три разноцветных, то каждого цвета должно быть не менее чем 20. Иначе данный цвет можно было бы исключить и оставить 101 карандаш двух цветов.

Тогда любых двух цветов в сумме не менее 40 и третьего (любого из них) цвета не более 80. Следовательно, среди любы 81 цветов найдется хотя бы два разного цвета.

Покажем, что 80 карандашей может быть недостаточно. Пусть в наборе 80 белых и по 20 черных и красных. Тогда может получиться, что все вытащенные карандаши белые. С другой стороны, если вытащить 101 карандаш, то среди них точно встретятся карандаши всех трёх цветов.

**Критерии**

7 б. Верное решение.

3 б. Доказано, что 61 кролика хватит.

2 б. Показано, что 60 кроликов может не хватить.

0 б. Только правильный ответ.