9 класс

Общие принципы оценивания работ приведены в таблице.

баллы	правильность (ошибочность) решения
7	полное верное решение
6-7	верное решение с небольшими недочетами, не влияющими на решение
5-6	решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений и дополнений
2-3	доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи
0-1	рассмотрены одельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении)
0	решение неверное, продвижения отсутствуют
0	решение отсутствует

В остальных задачах будут приведены примерные критерии.

1. Найдите наименьшее значение выражения $x + 2y$, если известно, что $xy = 2$ и $x > 0$.

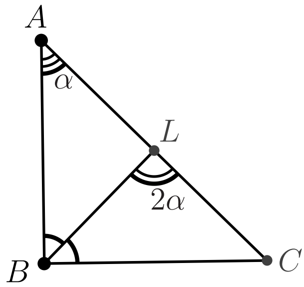
Решение. $y = \dfrac{2}{x}$, значит, $x + 2y = x + \dfrac{4}{x} = \dfrac{x^2+4}{x} = \dfrac{(x-2)^2+2x}{x} = \dfrac{(x-2)^2}{x} + 2 \geq 2$. Ответ: 2.

2. Может ли число, состоящее из 312 единиц и 100 нулей, быть полным квадратом какого-то натурального числа?

Решение. Нет, не может. Кратность каждого простого делителя числа, представляющего полный квадрат, — четная. Рассматриваемое число, независимо от порядка следования цифр, делится на 3, но не делится на 9.

Критерии. 2 балла — сказано, что кратность каждого простого делителя чётная, но задача не решена.

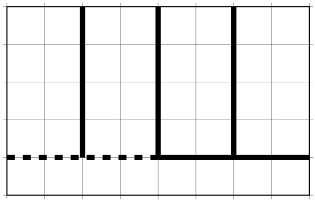
3. Из вершины B треугольника ABC проведена биссектриса BL. Оказалось, что треугольник BLC — равнобедренный с вершиной L. Известно, что $\angle BAC = \dfrac{1}{2}\angle BLC$. Чему равна площадь треугольника ABC, если $BL = 2$?



Решение. Обозначим $\angle BAL = \alpha$, тогда $\angle BLC = 2\alpha$. Для треугольника BAL имеем: $\angle ABL = \alpha$. Следовательно, $\angle ACB = \alpha$. По теореме о сумме углов треугольника получаем $4\alpha = 180°$. Т.е. $\alpha = 45°$. Поэтому $\triangle ABC$ — равнобедренный прямоугольный. Так как $BL = 2$, из треугольника BLC получаем $BC = 2\sqrt{2}$. Значит, площадь треугольника $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 4$.

Критерии. *3 балла* — найден угол альфа, но задача не решена.

4. Участок 160×100 метров выделен под огороды и обнесен огадой снаружи. Как установить внутри участка 5 прямолинейных оград одинаковой длины, чтобы разбить участок на 5 прямоугольных участков одинаковой площади?



Решение. Ограды имеют длину 80 м. Пример на рисунке (одна клетка — 20×20 метров).

Критерии. *3 балла* — найдена длина оград, но задача не решена.

5. Докажите, что уравнение

$$\frac{1}{x+2019} - \frac{1}{x+2020} + \frac{1}{x+2021} = 0$$

не имеет корней.

Решение. Сделаем замену $t = x + 2020$. Тогда

$$\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{t+1} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{t^2+1}{t(t+1)(t-1)} = 0.$$

Последнее уравнение решений не имеет. Значит, исходное уравнение тоже решений не имеет.

Критерии. *2 балла* — продвижения до квадратного уравнения.