Занятие на тему «Бином Ньютона. Треугольник Паскаля»

Внимательно изучаем материал занятия, делаем опорный конспект в рабочих тетрадях, решаем упражнения по вариантам (1 вариант – нечетные, 2 вариант – четные). Сканы работ отправляем вконтакте https://vk.com/nureeva79 ***Расима Нуреева***

В теории многочленов часто двучлены называют *биномами*. Рассмотрим целые неотрицательные степени бинома $a + b$ (при условии $a + b \neq 0$):

$(a+b)^0 = 1,$

$(a+b)^1 = 1 \cdot a + 1 \cdot b,$

$(a+b)^2 = 1 \cdot a^2 + 2ab + 1 \cdot b^2,$

$(a+b)^3 = 1 \cdot a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1 \cdot b^3,$

$(a+b)^4 = (a+b)^3\,(a+b) =$

$= 1 \cdot a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1 \cdot b^4,$

$(a+b)^5 = (a+b)^4\,(a+b) =$

$= 1 \cdot a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1 \cdot b^5$

и т. д.

Можно доказать справедливость следующей формулы, называемой биномиальной формулой Ньютона:

$$(a+b)^m = C_m^0 \cdot a^m + C_m^1 \cdot a^{m-1}b + C_m^2 \cdot a^{m-2}b^2 + \ldots + C_m^n \cdot a^{m-n}b^n + \ldots + C_m^{m-1} \cdot ab^{m-1} + C_m^m \cdot b^m. \qquad (1)$$

Формулу (1) чаще всего называют просто *биномом Ньютона*, а числа C_m^n — *биномиальными коэффициентами*, которые могут быть найдены по формуле

$$C_m^n = \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!}.$$

Биномиальные коэффициенты легко находить с помощью так называемого *треугольника Паскаля* — таблицы значений C_m^n, составленной на основании рекуррентного свойства числа сочетаний $C_m^n + C_m^{n+1} = C_{m+1}^{n+1}$ с учётом того, что $C_m^0 = C_m^m = 1$.

Ниже приводится фрагмент треугольника Паскаля, в котором стрелками показан процесс получения определённых членов таблицы на основании рекуррентного свойства. Например, при $m = 4$ имеем строку 1, 4, 6, 4, 1, полученную из предыдущей строки следующим образом: $4 = 1 + 3$, $6 = 3 + 3$, $4 = 3 + 1$ (первый и последний члены строки равны $C_4^0 = C_4^4 = 1$).

$m \backslash n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	7	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Задача 1 Записать разложение бинома $(x - 2)^6$.

▶ По формуле (1) находим

$$(x - 2)^6 = (x + (-2))^6 =$$
$$= C_6^0x^6 + C_6^1x^5 \cdot (-2) + C_6^2x^4 \cdot (-2)^2 + C_6^3x^3 \cdot (-2)^3 +$$
$$+ C_6^4x^2 \cdot (-2)^4 + C_6^5x \cdot (-2)^5 + C_6^6 \cdot (-2)^6 =$$
$$= x^6 + 6x^5 \cdot (-2) + 15x^4 \cdot 4 + 20x^3 \cdot (-8) +$$
$$+ 15x^2 \cdot 16 + 6x \cdot (-32) + 64 =$$
$$= x^6 - 12x^5 + 60x^4 - 160x^3 + 240x^2 - 192x + 64. \triangleleft$$

Пример. Раскрыть скобки в выражении: а) $(x+1)^6$; б) $(a^2-2b)^5$.

Решение. а) Применим формулу (1), считая, что $a=x$, $b=1$, $n=6$. Получим:

$$(x+1)^6 = C_6^0x^6 + C_6^1x^5\cdot 1 + C_6^2x^4\cdot 1^2 + C_6^3x^3\cdot 1^3 +$$
$$+ C_6^4x^2\cdot 1^4 + C_6^5x\cdot 1^5 + C_6^6\cdot 1^6.$$

Осталось вычислить биномиальные коэффициенты:

$$C_6^0 = C_6^6 = 1;\ C_6^1 = C_6^5 = 6;\ C_6^2 = C_6^4 = \frac{6!}{2!\cdot 4!} = \frac{6\cdot 5}{2\cdot 1} = 15;$$

$$C_6^3 = \frac{6!}{3!\cdot 3!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1} = 20.$$

Таким образом, $(x+1)^6 = x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1$.

б) Применим формулу (1), считая, что в роли a выступает $2a^2$, а в роли b выступает $-2b$. Получим:

$$(a^2-2b)^5 = C_5^0(a^2)^5 + C_5^1(a^2)^4(-2b) + C_5^2(a^2)^3(-2b)^2 +$$
$$+ C_5^3(a^2)^2(-2b)^3 + C_5^4(a^2)(-2b)^4 + C_5^5(-2b)^5.$$

Осталось вычислить биномиальные коэффициенты:

$$C_5^0 = C_5^5 = 1;\ C_5^1 = C_5^4 = 5;\ C_5^2 = C_5^3 = \frac{5!}{2!\cdot 3!} = \frac{5\cdot 4}{2\cdot 1} = 10.$$

Таким образом, $(a^2-2b)^5 = a^{10} - 10a^8b + 40a^6b^2 - 80a^4b^3 + 80a^2b^4 - 32b^5$. ◀■

Упражнения

Записать разложение бинома:

1) $(1+x)^8$; 2) $(x+1)^7$; 3) $(a-1)^9$; 4) $(y-1)^{10}$;
5) $(2x+1)^5$; 6) $(x+2)^6$; 7) $(3x+2)^4$; 8) $(2a+3)^5$;
9) $\left(2a-\frac{1}{2}\right)^5$; 10) $\left(3x-\frac{1}{3}\right)^4$.