Тема занятия « Элементы комбинаторики»

1. Комбинаторика и ее возникновение.

Комбинаторика- это область математики, в которой изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из элементов, принадлежащих данному множеству.

Комбинаторика возникла в XVI веке. В жизни привилегированных слоев тогдашнего общества большое место занимали азартные игры (карты, кости). Широко были распространены лотереи. Первоначально комбинаторные задачи касались в основном азартных игр: сколькими способами можно получить данное число очков, бросая 2 или 3 кости или сколькими способами можно получить 2-ух королей в некоторой карточной игре. Эти и другие проблемы азартных игр являлись движущей силой в развитии комбинаторики и далее в развитии теории вероятностей.

Одним из первых занялся подсчетом числа различных комбинаций при игре в кости итальянский математик Тарталья. Он составил таблицы (числа способов выпадения k очков на r костях). Однако, он не учел, одна и та же сумма очков может выпасть различными способами, поэтому его таблицы содержали большое количество ошибок.

Теоретическое исследование вопросов комбинаторики предприняли в XVII веке французские математики Блез Паскаль и Ферма. Исходным пунктом их исследований были так же проблемы азартных игр.

Дальнейшее развитие комбинаторики связано с именами Я. Бернулли, Г. Лейбница, Л. Эйлера. Однако, и в их работах основную роль играли приложения к различным играм.

Сегодня комбинаторные методы используются для решения транспортных задач, в частности задач по составлению расписаний, для составления планов производства и реализации продукции и т.д.

2. Общие правила комбинаторики.

Правило суммы: Если некоторый объект A может быть выбран m способами, а объект B- k способами, то объект «либо A, либо B» можно выбрать m+k способами.

Примеры:

1. Допустим, что в ящике находится n разноцветных шаров. Произвольным образом вынимается 1 шарик. Сколькими способами это можно сделать?

   Ответ: n способами.

Распределим эти n шариков по двум ящикам: в первый- m шариков, во второй- k шариков. Произвольным образом из произвольно выбранного ящика вынимается 1 шарик. Сколькими способами это можно сделать?

Решение: Из первого ящика шарик можно вынуть m способами, из второго- k способами. Тогда всего способов m+k=n.

2. Сколькими разными способами можно заказать напиток в кафе, где есть 8 видов сока и 5 видов минеральной воды?
Решение. Напиток – это или сок (объект *X*), или минеральная вода (объект *Y*). Сок можно выбрать 8-ю разными способами, минеральную воду – 5-ю, причем способы выбора несовместны. Тогда по правилу суммы напиток (объект «*X* ***или*** *Y*») можно выбрать 8+5=13-ю способами.
3. Пусть есть колода карт (36 листов). Объект *X* – карта червовой масти – может быть выбран 9-ю разными способами. Объект *Y* – туз – может быть выбран 4-мя разными способами. Сколькими способами может быть выбран объект «*X* или *Y*» – «червовая карта или туз»?
Решение. В этом примере *правило суммы не работает*, так как способы выбора объектов *X* и *Y* совместны: один из способов выбора объекта *X* совпадает с одним из способов выбора объекта *Y* (выбор червового туза – это и способ выбора объекта *X*, и способ выбора объекта *Y*). Задача решается перебором подходящих карт: червовых карт 9 и ещё 3 туза (один уже учтён). Значит, червовую карту или туз можно выбрать 9+3=12-ю способами.

2. Морской семафор.

В морском семафоре каждой букве алфавита соответствует определенное положение относительно тела сигнальщика двух флажков. Сколько таких сигналов может быть?

Решение: Общее число складывается из положений, когда оба флажка расположены по разные стороны от тела сигнальщика и положений, когда они расположены по одну сторону от тела сигнальщика. При подсчете числа возможных положений применяется правило суммы.

Правило произведения: Если объект А можно выбрать m способами, а после каждого такого выбора другой объект В можно выбрать (независимо от выбора объекта А) k способами, то пары объектов «А и В» можно выбрать m*k способами.

Примеры:

1. Сколько двузначных чисел существует?

Решение: Число десятков может быть обозначено любой цифрой от 1 до 9. Число единиц может быть обозначено любой цифрой от 0 до 9. Если число десятков равно 1, то число единиц может быть любым (от 0 до 9). Таким образом, существует 10 двузначных чисел, с числом десятков-1. Аналогично рассуждаем и для любого другого числа десятков. Тогда можно посчитать, что существует 9 *10 = 90 двузначных чисел.

2. Имеется 2 ящика. В одном лежит m разноцветных кубиков, а в другом- k разноцветных шариков. Сколькими способами можно выбрать пару «Кубик-шарик»?

Решение: Выбор шарика не зависит от выбора кубика, и наоборот. Поэтому, число способов, которыми можно выбрать данную пару равно m*k.

3. В гардеробе имеется 3 юбки (чёрная, коричневая, фиолетовая) и 4 блузки (белая, сиреневая, желтая и розовая). Сколько разных нарядов можно из них составить?
Решение. Эту задачу можно решать *перед формулировкой правила произведения.* При этом целесообразно использовать граф для перебора всех вариантов:

Юбка
Чёрная
Коричневая
Фиолетовая

Блузка
Белая
Сиреневая
Желтая
Розовая

Юбку можно выбрать тремя разными способами. Для каждого из них блузку можно выбрать 4-мя способами. Тогда по правилу произведения весь наряд, то есть юбку *и* блузку, можно выбрать $3 \cdot 4 = 12$ -ю способами.

4. В кафе имеются три первых блюда, пять вторых блюд и два третьих. Сколькими способами посетитель кафе может выбрать обед, состоящий из первого, второго и третьего блюд?

Решение.

По условию задачи последовательно осуществляются три выбора, но каждый выбор - из своего множества вариантов; поэтому выборы независимы, а каждая выбираемая тройка блюд оказывается упорядоченной (первое - второе - третье). По правилу произведения общее число способов выбрать обед равно $3 \cdot 5 \cdot 2 = 30$.

Ответ: 30 способов.