

Урок на тему «Решение показательных уравнений различными способами»

методы решения	образцы решения			
$a^{f(x)} = b$ 1) в обеих частях уравнения привести степени к одному основанию $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ 2) приравнять показатели степеней $f(x) = g(x)$	а) $5^{3x-2} = 5^{10-x}$ $3x - 2 = 10 - x$ $4x = 12$ $x = 3$ Ответ: 3. б) $2^x = 32$ $2^x = 2^5$ $x = 5$ Ответ: 5 в) $4^x = \frac{1}{64}$ $4^x = 4^{-3}$ $x = -3$ Ответ: - 3.	г) $\sqrt[3]{128} = 8^{2x}$ $\sqrt[3]{2^7} = (2^3)^{2x}$ $2^{\frac{7}{3}} = 2^{6x}$ $6x = \frac{7}{3}$ $x = \frac{7}{9} : 6$ $x = \frac{7}{18}$ Ответ: $\frac{7}{18}$.	д) $2^x \cdot 5^x = 0,1 \cdot 10^{3x^2-1}$ $(2 \cdot 5)^x = 10^{-1} \cdot 10^{3x^2-1}$ $10^x = 10^{3x^2-2}$ $x = 3x^2 - 2$ $3x^2 - x - 2 = 0$ $D = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 25$ $x_1 = \frac{1+5}{6} = 1$ $x_2 = \frac{1-5}{6} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$ Ответ: 1; $-\frac{2}{3}$.	е) $\frac{6^{x^2}}{3^2} = \frac{2^2}{6^{8-5x}}$ $6^{x^2} \cdot 6^{8-5x} = 3^2 \cdot 2^2$ $6^{x^2-5x+8} = (3 \cdot 2)^2$ $6^{x^2-5x+8} = 6^2$ $x^2 - 5x + 8 = 2$ $x^2 - 5x + 6 = 0$ $x_1 = 2$ $x_2 = 3$ Ответ: 2; 3.
$a^{f(x)} = 1$ представить 1 в виде степени числа a с нулевым показателем $a^{f(x)} = a^0$ $f(x) = 0$	а) $4 \cdot 2^x = 1$ $2^2 \cdot 2^x = 2^0$ $2^{2+x} = 2^0$ $2 + x = 0$ $x = -2$ Ответ: - 2.	б) $17^{x^2-5x+6} = 1$ $17^{x^2-5x+6} = 17^0$ $x^2 - 5x + 6 = 0$ $x_1 = 2$ или $x_2 = 3$ Ответ: 2; 3.		
$A_1 a^{f(x)+k_1} + A_2 a^{f(x)+k_2} + \dots + A_n a^{f(x)+k_n} = B$ (A, k, B числовые коэффициенты) 1) вынести общий множитель за скобки $a^{f(x)} (A_1 a^{k_1} + A_2 a^{k_2} + \dots + A_n a^{k_n}) = B$ 2) выполнить преобразования и привести уравнение к виду $a^{f(x)} = a^{g(x)}$	а) $3^x - 2 \cdot 3^{x-2} = 63$ $3^x - 2 \cdot 3^x \cdot 3^{-2} = 63$ $3^x (1 - 2 \cdot 3^{-2}) = 63$ $3^x \cdot \left(1 - \frac{2}{9}\right) = 63$ $3^x \cdot \frac{7}{9} = 63$ $3^x = 63 : \frac{7}{9}$ $3^x = 81$ $3^x = 3^4 \quad x = 4$ Ответ: 4.	б) $5^{2x-1} - 5^{2x} + 2^{2x} + 2^{2x+2} = 0$ $2^{2x} + 2^{2x+2} = 5^{2x} - 5^{2x-1}$ $2^{2x} (1 + 2^2) = 5^{2x} (1 - 5^{-1})$ $2^{2x} \cdot 5 = 5^{2x} \cdot \frac{4}{5}$ $\frac{2^{2x}}{5^{2x}} = \frac{4}{25}$ $\left(\frac{2}{5}\right)^{2x} = \left(\frac{2}{5}\right)^2$ $2x = 2$ $x = 1$ Ответ: 1.	в) $6^{x+1} - 18 \cdot 2^x = 3^{x+1} - 9$ $6^{x+1} - 3^{x+1} = 18 \cdot 2^x - 9$ $2^{x+1} \cdot 3^{x+1} - 3^{x+1} = 9 \cdot 2 \cdot 2^x - 9$ $3^{x+1} (2^{x+1} - 1) = 9(2^{x+1} - 1)$ $(2^{x+1} - 1)(3^{x+1} - 9) = 0$ $2^{x+1} - 1 = 0$ или $3^{x+1} - 9 = 0$ $2^{x+1} = 1 = 2^0 \quad 3^{x+1} = 9 = 3^2$ $x+1 = 0 \quad x+1 = 2$ $x = -1 \quad x = 1$ Ответ: -1; 1.	

$$Aa^{2x} + Ba^x + C = 0$$

1) обозначить $a^x = y$

2) решить полученное квадратное уравнение $Ay^2 + By + C = 0$

относительно y

3) выполнить обратную замену и решить уравнения $a^x = y_1$, $a^x = y_2$ относительно x

а) $7^{2x} - 8 \cdot 7^x + 7 = 0$

$$7^x = y$$

$$y^2 - 8y + 7 = 0$$

$$y_1 = 1 \text{ или } y_2 = 7$$

$$7^x = 1 \quad 7^x = 7$$

$$7^x = 7^0 \quad x = 1$$

$$x = 0$$

Ответ: 0; 1.

б) $9^x - 4 \cdot 3^x - 45 = 0$

$$3^{2x} - 4 \cdot 3^x - 45 = 0$$

$$3^x = t$$

$$t^2 - 4t - 45 = 0$$

$$t_1 = 9 \text{ или } t_2 = -5$$

1) $3^x = 9$

$$3^x = 3^2$$

$$x = 2$$

2) $3^x = -5$

корней нет,

т.к. $3^x > 0$ при любом x

Ответ: 2.

в) $2^{2+x} - 2^{2-x} = 15$

$$2^2 \cdot 2^x - 2^2 \cdot 2^{-x} = 15$$

$$2^2 \cdot 2^x - \frac{2^2}{2^x} = 15$$

$$4 \cdot 2^x - \frac{4}{2^x} = 15$$

$$2^x = y$$

$$4y - \frac{4}{y} = 15$$

т.к. $y \neq 0$, умножим

всё уравнение на y

$$4y^2 - 15y - 4 = 0$$

$$y_1 = 4 \text{ или } y_2 = -\frac{1}{4}$$

1) $2^x = 4 = 2^2 \quad x = 2$

2) $2^x = -\frac{1}{4}$

нет решений,

т.к. $2^x > 0$ при любом x

Ответ: 2.

г) $2^{2x} + 6^x = 2 \cdot 3^{2x}$

$$2^{2x} + 2^x \cdot 3^x = 2 \cdot 3^{2x}$$

всё уравнение

можно поделить на

$$3^{2x} \neq 0$$

$$\frac{2^{2x}}{3^{2x}} + \frac{2^x \cdot 3^x}{3^{2x}} = \frac{2 \cdot 3^{2x}}{3^{2x}}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + \left(\frac{2}{3}\right)^x - 2 = 0$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = y$$

$$y^2 + y - 2 = 0$$

$$y_1 = -2 \text{ или } y_2 = 1$$

1) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = -2$

корней нет

2) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1$

$$x = 0$$

Ответ: 0.

Самостоятельная работа

<p style="text-align: center;">Вариант 1.</p> <p>I. Решите уравнения:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. $5^{x-2} = 25$ 2. $3^{x-4} = 1$ 3. $2^{x+2} + 2^x = 5$ 4. $9^x - 6 \cdot 3^x - 27 = 0$ 5. $\left(15^{x^2+x-2}\right)^{\sqrt{x-4}} = 1$ 	<p style="text-align: center;">Вариант 2.</p> <p>I. Решите уравнения:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. $2^{x+5} = 32$ 2. $5^{2x} + 8 = 9$ 3. $3^{x+2} - 3^x = 72$ 4. $25^x - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$ 5. $\left(17^{\sqrt{x^2+2x-8}}\right)^{x+3} = 1$
<p>Вариант 3. Решите уравнения:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. $6^{x-3} = 36$ 2. $5^{x-6} = 1$ 3. $3^{x+2} + 3^x = 30$ 4. $4^x - 14 \cdot 2^x - 32 = 0$ 5. $\left(0,7^{x-4}\right)^{\sqrt{x^2-2x-15}} = 1$ 	<p>Вариант 4. Решите уравнения:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. $5^{x-3} = 125$ 2. $4^{x+1} - 3 = -2$ 3. $2^{x+3} - 2^x = 112$ 4. $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$ 5. $\left(15^{x^2+x-2}\right)^{\sqrt{x-4}} = 1$
<p>Вариант 5. Решите уравнения:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. $8^{x-9} = 64$ 2. $16^{x+9} - 8 = -7$ 3. $2^x + 2^{x+3} = 9$ 4. $9^x - 3^{x+1} = 54$ 5. $\left(17^{\sqrt{x^2+2x-8}}\right)^{x+3} = 1$ 	<p>Вариант 6. Решите уравнения:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. $2^{3x-5} = 16;$ 2. $3^{x^2-5x+2} = 81^{-1}.$ 3. $5^{x-1} + 5^x = 150;$ 4. $2 \cdot 2^{2x} - 17 \cdot 2^x + 8 = 0.$ 5. $\left(0,7^{x-4}\right)^{\sqrt{x^2-2x-15}} = 1$
<p>Вариант 7. Решите уравнения:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. $7^{x+10} = 49$ 2. $3 - 4^{x+5} = 2$ 3. $3^x + 3^{x+1} = 4$ 4. $4^x - 3 \cdot 2^x = 4$ 5. $\left(15^{x^2+x-2}\right)^{\sqrt{x-4}} = 1$ 	<p>Вариант 8. Решите уравнения:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. $3^{2x+7} = 243;$ 2. $6^{x-2} - 6^{x-1} = -180.$ 3. $2^{x^2-x-1} = 32$ 4. $3 \cdot 3^{2x} - 28 \cdot 3^x + 9 = 0.$ 5. $\left(17^{\sqrt{x^2+2x-8}}\right)^{x+3} = 1$