Урок на тему «Степень с рациональным показателем»

1. Степень с рациональным показателем

Напомним, что в 7 классе мы впервые познакомились с понятием степени, причем тогда рассматривались случаи, когда показателем степени является натуральное число. В 8 классе понятие степени было расширено, теперь в него включались случаи, когда показатель являлся целым числом. Настоятельно рекомендуем перечитать соответствующие уроки. Сегодня же мы можем сделать ещё один шаг вперед и рассмотреть степени с рациональными показателями.

При расширении понятия степени важно обеспечить то, чтобы уже известные правила работы с целыми степенями работали и для дробных показателей. Одно из свойств степеней выглядит так:

$(a^m)^n = a^{mn}$

Подставим в эту формулу следующие значения переменных:

$a = 3$

$m = 1/6$

$n = 6$

Мы специально выбрали эти числа такими, чтобы произведение mn равнялось единице:

$mn = (1/6)•6 = 1$

Подставляем эти значения:

$(3^{1/6})^6 = 3^{1/6•6} = 3^1 = 3$

Получили, что

$(3^{1/6})^6 = 3$

Однако по определению корня n-ой степени число, дающее при возведении в шестую степень тройку, является корнем шестой степени из трех. То есть можно записать:

$3^{1/6} = \sqrt[6]{3}$

С помощью подобных преобразований нам удалось указать, чему равно число, возведенное в дробную степень. Аналогично можно показать, что для любого a > 0 справедлива формула:

$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$

Действительно, если возвести левую часть в n-ую степень, то получим:

$(a^{1/n})^n = a^{1/n•n} = a$

Значит, по определению корня n-ой степени

$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$

**Для любого a > 0 справедлива формула:**

$$\mathbf{a^{1/n} = \sqrt[n]{a}}$$

Ограничение a > 0 необходимо для того, чтобы не рассматривать случаи, когда подкоренное выражение является отрицательным.

Продолжим наши рассуждения. Чему будет равна степень $a^{m/n}$? Ясно, что дробь m/n можно представить в виде:

$m/n = (1/n)\cdot m$

С учетом этого выполним преобразование:

$$a^{m/n} = a^{(1/n)\cdot m} = \left(a^{1/n}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

В результате несложных преобразований нам удалось получить формулу, позволяющую возводить число в степень, у которой рациональный показатель!

Для любого **a > 0** и дроби **m/n** справедлива формула:

$$\mathbf{a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}}$$

Приведем несколько примеров вычисления дробных степеней:

$$8^{1/3} = \sqrt[3]{8^1} = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$81^{1/4} = \sqrt[4]{81^1} = \sqrt[4]{81} = 4$$

$$81^{1/4} = \sqrt[4]{81^1} = \sqrt[4]{81} = 3$$

$$4^{3/2} = \sqrt[2]{4^3} = \sqrt[2]{64} = 8$$

Часто при вычислениях удобнее сначала извлечь корень из числа, а потом полученный результат возвести в степень:

$$125^{2/3} = \sqrt[3]{125^2} = \left(\sqrt[3]{125}\right)^2 = 5^2 = 25$$

$$32^{3/5} = \sqrt[5]{32^3} = \left(\sqrt[5]{32}\right)^3 = 2^3 = 8$$

$$0{,}01^{-5/2} = \sqrt[2]{0{,}01^{-5}} = \left(\sqrt[2]{0{,}01}\right)^{-5} = 0{,}1^{-5} = \frac{1}{0{,}1^5} = \frac{1}{0{,}00001} = 100000$$

Напомним, что одну и ту же дробь можно представить разными способами, например:

1/2 = 2/4 = 3/6 = 4/8 = 5/10 = 0,5

Возникает вопрос – изменится ли значение дробной степени, если мы приведем дробь к новому знаменателю? Очевидно, что нет, но всё же убедимся в этом на примере. Сначала возведем в степень 1/2 число 25:

$$25^{1/2} = \sqrt[2]{25^1} = \sqrt[2]{25} = 5$$

Теперь заменим дробь 1/2 на идентичную ей дробь 2/4:

$$25^{2/4} = \sqrt[4]{25^2} = \sqrt[4]{625} = 5$$

Результат не изменился. В общем случае есть смысл максимально сократить дробь перед вычислением, чтобы избежать операций с большими числами. Особенно это касается десятичных дробей. Например, пусть необходимо вычислить значение выражения $81^{0,25}$. По определению десятичной дроби можно записать, что 0,25 = 25/100. Тогда вычислить $81^{0,25}$ можно так:

$$81^{0,25} = 81^{25/100} = \sqrt[100]{81^{25}}$$

Согласитесь, возводить число 81 в 25-ую степень не очень легко! Поэтому поступим иначе. Сократим дробь 25/100:

0,25 = 25/100 = 25/(25•4) = 1/4

Теперь вычисления будет более простыми:

$$81^{0,25} = 81^{25/100} = 81^{1/4} = \sqrt[4]{81^1} = \sqrt[4]{81} = 3$$

Вообще легко запомнить, что 0,25 = 1/4, а 0,5 = 1/2. Замена десятичных дробей обыкновенными дробями сильно упрощает вычисления. Приведем примеры:

$$49^{0,5} = 49^{1/2} = \sqrt[2]{49^1} = \sqrt[2]{49} = 7$$

$$16^{-0,5} = 16^{-1/2} = \sqrt[2]{16^{-1}} = \left(\sqrt[2]{16}\right)^{-1} = 4^{-1} = \frac{1}{4^1} = \frac{1}{4} = 0,25$$

$$36^{1,5} = 36^{3\cdot 0,5} = (36^{0,5})^3 = \left(36^{1/2}\right)^3 = \left(\sqrt[2]{36}\right)^3 = 6^3 = 216$$

$$16^{1,25} = 16^{0,25\cdot 5} = (16^{0,25})^5 = \left(16^{1/4}\right)^5 = \left(\sqrt[4]{16}\right)^5 = 2^5 = 32$$

## 2. Свойства дробных степеней и операции с ними

Когда мы изучали степени с целыми показателями, мы выяснили, что правила работы с ними ничем не отличаются от правил работы со степенями с натуральным показателем. Оказывается, эти же правила работают и для степеней с рациональным показателем. Сформулируем основные свойства дробных степеней.

**При перемножении степеней с одинаковым основанием основание степени остается неизменным, а показатели складываются:**
**$a^m a^n = a^{m+n}$ .**

Например, справедливы следующие действия:

$5^{0,5}\cdot 5^{2,5} = 5^{0,5 + 2,5} = 5^3 = 125$

$19^{5/3}\cdot 19^{1/3} = 19^{5/3 + 1/3} = 19^2 = 361$

$29,36^{-0,37}\cdot 29,36^{1,37} = 29,36^{-0,37 + 1,37} = 29,36^1 = 29,36$

При делении степеней с одинаковым основанием основание степени остается неизменным, а из показателя делимого надо вычесть показатель делителя :
$a^m : a^n = a^{m-n}$ .

Вот несколько примеров подобных вычислений:
$17^{4,5}:17^{3,5} = 17^{4,5-3,5} = 17^1 = 1$
$4^{9,36}:4^{6,36} = 4^{9,36-6,36} = 4^3 = 64$
$20^{12}:20^{14} = 20^{12-14} = 20^{-2}$

При возведении одной степени в другую основание исходной степени не меняется, а показатели перемножаются:
$(a^m)^n = a^{mn}$ .

Проиллюстрируем это правило примерами:
$(6^{0,25})^8 = 6^{0,25\bullet 8} = 6^2 = 36$
$(9^{3/2})^2 = 9^{(3/2)\bullet 2} = 9^3 = 729$
$(25^4)^{0,125} = 25^{4\bullet 0,125} = 25^{0,5} = 5$

При перемножении степеней с одинаковыми показателями их основания перемножаются:
$a^n b^n = (ab)^n$.

Покажем, как можно применять данное правило:
$4^{1/6}\bullet 16^{1/6} = (4\bullet 64)^{1/6} = 64^{1/6} = 2$
$0,5^{1,5}\bullet 50^{1,5} = (0,5\bullet 50)^{1,5} = 25^{1,5} = 25^{1+0,5} = 25^1\bullet 25^{0,5} = 25\bullet 5 = 125$
$4,9^{0,5}\bullet 10^{0,5} = (4,9\bullet 10)^{0,5} = 49^{0,5} =7$

При делении степеней с одинаковыми показателями следует поделить показатель делимого на показатель делителя, а степень оставить неизменной:

$$a^n : b^n = (a:b)^n \text{ или } \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n .$$

Это правило можно применять следующим образом:
$360^{0,5}:10^{0,5} = (360:10)^{0,5} = 36^{0,5} = 6$

$500^3:50^3 = (500:50)^3 = 10^3 = 1000$

$6{,}25^{1/4}:0{,}01^{1/4} = (6{,}25:0{,}01)^{1/4} = 625^{1/4} = 5$

Заметим, что степени очень удобны тем, что с их помощью легко упростить работу с корнями, ведь если

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

то верное и обратное:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$$

То есть любое выражение с корнями в виде степени с рациональным показателем.

**Пример. Вычислите значение выражения**

$$\sqrt[5]{\sqrt[4]{9}} \bullet \sqrt[10]{3^9}$$

Решение. Корней много, поэтому для удобства заменим их степенями

$$\sqrt[5]{\sqrt[4]{9}} \bullet \sqrt[10]{3^9} = \sqrt[5]{9^{1/4}} \bullet 3^{9/10} = (9^{1/4})^{1/5} \bullet 3^{9/10}$$

Получили тоже самое выражение, но в более компактном виде. Посчитаем его значение:

$(9^{1/4})^{1/5} \bullet 3^{9/10} = (9^{0,25})^{0,2} \bullet 3^{0,9} = 9^{0,25 \bullet 0,2} \bullet 3^{0,9} = 9^{0,05} \bullet 3^{0,9} = (3^2)^{0,05} \bullet 3^{0,9} =$

$= 3^{2 \bullet 0,05} \bullet 3^{0,9} = 3^{0,1} \bullet 3^{0,9} = 3^{0,1 \bullet 0,9} = 3^1 = 3$

Ответ: 3.

**Пример. Упростите выражение**

$(81^{n+1} – 65 \bullet 81^n)^{0,25}$

Решение. Степень $81^{n+1}$ можно представить как произведение:

$81^{n+1} = 81^n \bullet 81^1 = 81 \bullet 81^n$

С учетом этого можно записать:

$(81^{n+1} – 65 \bullet 81^n)^{0,25} = (81 \bullet 81^n – 65 \bullet 81^n)^{0,25} = (81^n(81 – 65))^{0,25} =$

$= (81^n \bullet 16)^{0,25} = 81^{0,25n} \bullet 16^{0,25} = 81^{0,25n} \bullet 16^{1/4} = 2 \bullet 81^{0,25n}$

Ответ: $2 \bullet 81^{0,25n}$.

## 3. Сравнение степеней

Напомним, что из двух корней n-ой степени больше тот, у которого больше подкоренное выражение:

$$\text{если } a < b, \text{то } \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$$

Отсюда следует вывод, что если $a<b$, то

$a^{1/n}<b^{1/n}$

теперь возведем каждую часть этого неравенства в степень **m**. Тогда получим неравенство:

$a^{m/n}<b^{m/n}$

Получили, что из двух степеней с одинаковыми показателями меньше та, у которой меньше основание (правила сравнения будем нумеровать, чтобы на них удобнее было ссылаться):

**1. Для любых положительных a, b и n из условия a < b следует, что $a^n < b^n$.**

В частности, справедливы следующие неравенства:

$23^{3,75} < 24^{3,75}$

$63^{4/3} < 64^{4/3}$

$0,008^{0,002} < 0,008^{0,002}$

Здесь мы рассматривали случаи, когда показатель степени является положительным числом. А что делать, если он отрицательный? Тогда степень следует «перевернуть», воспользовавшись уже известной вам формулой:

$a^{-n} = 1/a^n = (1/a)^n$

**Пример. Сравните выражения с рациональным показателем степени:**

**$20^{-3,14}$ и $50^{-3,14}$**

Решение. Избавимся от знака минус в показателе:

$20^{-3,14} = (1/20)^{3,14} = 0,05^{3,14}$

$50^{-3,14} = (1/50)^{3,14} = 0,02^{3,14}$

Получили две степени с одинаковым и, что принципиально важно, положительным показателем. Из них больше та, у которой больше основание. То есть из неравенства 0,02 < 0,05 следует, что

$0,02^{3,14} < 0,05^{3,14}$

Это означает, что

$50^{-3,14} < 20^{-3,14}$

Ответ: $50^{-3,14} < 20^{-3,14}$.

Особенным является случай, когда показатель степени равен нулю. Напомним, что любое число в нулевой степени (кроме самого нуля) равно единице, а выражение $0^0$ не имеет смысл. Это значит, что числа в нулевой степени равны друг другу, даже если у них разные основания:

$25^0 = 26^0 = 1$

$9,36^0 = 9,37^0 = 1$

$18,3546^0 = 12,3647^0 = 1$

Несколько сложнее сравнивать числа, у которых одинаковые основания, но различные показатели. Здесь возможны три случая – основание либо равно единице, либо больше неё, либо меньше неё.

> 2. Если число **a > 1**, то для любых чисел **n** и **m** (в том числе и отрицательных) из условия **n < m** следует, что
> $a^n < a^m$.

На основании этого правила можно записать, что:

$5^{3,14} < 5^{3,15}$

$45^{-0,563} < 45^{0,001}$

$1,235^{-5,623} < 1,235^{-4,958}$

Единица в любой степени равна самой себе. Поэтому, если у двух чисел в основании записана именно она, то они должны быть равны друг другу:

$1^{-7,56} = 1^{-0,15} = 1^{0,236} = 1^{521,36} = 1$

Осталось рассмотреть случай, когда основание меньше единицы (но всё равно положительное). В таком случае ситуация становится противоположной – чем больше степень, тем меньше число. Проиллюстрируем это на примере. Пусть надо сравнить числа $0,5^{7,6}$ и $0,5^{8,9}$. Заменим дробь 0,5 так, чтобы вместо нее получилась степень с основанием, большим единицы:

$0,5 = 1/2 = 1/(2^1) = 2^{-1}$

Итак, $0,5 = 2^{-1}$. Тогда можно записать, что:

$0,5^{7,6} = (2^{-1})^{7,6} = 2^{-7,6}$

$0,5^{8,9} = (2^{-1})^{8,9} = 2^{-8,9}$

Такие числа мы уже умеем сравнивать. Так как

$-8,9 < -7,6$

то и

$2^{-8,9} < 2^{-7,6}$

Следовательно, $0,5^{7,6} > 0,5^{8,9}$.

> 3. Если **0 < a < 1**, то для любых чисел **n** и **m** (в том числе и отрицательных) из условия **n < m** следует, что
> $a^n > a^m$.

Например, справедливы неравенства:

$0,99^7 > 0,99^{7,24}$

$0,57^{15,36} > 0,57^{16,47}$

$0,49^{0,04} > 0,49^{0,05}$

Рассмотрим чуть более сложное задание на сравнение степеней, где надо использовать одновременно несколько правил.

**Пример. Докажите, что**

$0,9^{0,9} + 0,8^{0,8} + 0,7^{0,7} < 28^{1/3}$

Решение. Напрямую вычислить значение выражений в правой и левой части затруднительно. Однако мы можем усиливать неравенство, чтобы получить более простые выражения.

Усилить неравенство – это значит увеличить его меньшую или уменьшить большую часть. Например, неравенство 10 < 20 усилится, если вместо 10 написать большее число (11 < 20), или вместо 20 написать меньшее число (10 < 19). Очевидно, что если усиленное неравенство верное, то и изначальное (ослабленное) также справедливо.

Очевидно, что можно легко посчитать значение выражения $27^{1/3}$:

$$27^{1/3} = \sqrt[3]{27} = 3$$

Также ясно, что $27^{1/3} < 28^{1/3}$ (правило 1). Усилим исходное неравенство:

$0{,}9^{0,9} + 0{,}8^{0,8} + 0{,}7^{0,7} < 27^{1/3}$ (1)

Действительно, если (1) справедливо, то мы можем записать двойное неравенство

$0{,}9^{0,9} + 0{,}8^{0,8} + 0{,}7^{0,7} < 27^{1/3} < 28^{1/3}$

Опустив здесь среднюю часть, получим исходное неравенство. Так как $27^{1/3} = 3$, мы можем переписать (1) так:

$0{,}9^{0,9} + 0{,}8^{0,8} + 0{,}7^{0,7} < 3$ (2)

Далее будем работать с левой частью. Очевидно, что $0{,}8^{0,8} < 0{,}9^{0,8}$ (снова используем правило 1). С другой стороны, $0{,}9^{0,8} < 0{,}9^{0,7}$ (правило 3). Значит, можно записать двойное неравенство:

$0{,}8^{0,8} < 0{,}9^{0,8} < 0{,}9^{0,7}$

или просто $0{,}8^{0,8} < 0{,}9^{0,7}$. Абсолютно аналогично можно записать, что

$0{,}7^{0,8} < 0{,}9^{0,7} < 0{,}9^{0,7}$

Или $0{,}7^{0,8} < 0{,}9^{0,7}$. Наконец, в силу правила (3), $0{,}9^{0,9} < 0{,}9^{0,7}$. Итак, имеем три неравенства:

$0{,}9^{0,9} < 0{,}9^{0,7}$

$0{,}8^{0,8} < 0{,}9^{0,7}$

$0{,}7^{0,8} < 0{,}9^{0,7}$

Их левые части стоят в (2). Следовательно, можно усилить (2):

$0{,}9^{0,7} + 0{,}9^{0,7} + 0{,}9^{0,7} < 3$

$3 \cdot 0{,}9^{0,7} < 3$

Поделим обе части на 3:

$0{,}9^{0,7} < 1$

Заменим единицу равным ему выражением $1^{0,7}$:

$0{,}9^{0,7} < 1^{0,7}$ (4)

Из правила 1 следует, что (4) справедливо. Но мы получили его, усиливая исходное неравенство. Из справедливости более сильного неравенства следует и справедливость более слабого. Следовательно, из справедливости (4) вытекает верность исходного неравенства, которое и надо было доказать.

**Самостоятельная работа по теме: « Степень с рациональным показателем»**

**1 вариант**

**1. Вычислите**:

а) $3\cdot 16^{\frac{1}{2}}$; б) $27^{-\frac{1}{3}}$; в) $\dfrac{(3^{-2})^{3}\cdot 27^{2}}{9^{\frac{1}{2}}}$;

г) $5\cdot 16^{\frac{1}{4}}-0{,}2\cdot(-0{,}027)^{\frac{1}{3}}+\sqrt[5]{1}$.

**2. Упростите выражение**:

а) $a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{-\frac{1}{4}}$; б) $\dfrac{x^{\frac{3}{4}}\cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}}}$; в) $(c^{\frac{2}{3}})^{3}\cdot c^{-\frac{3}{2}}$;

г) $(81m^{-4})^{-\frac{3}{4}}$; д) $\dfrac{d^{5,2}\cdot d^{-4,8}}{d^{2,3}\cdot d^{-2,7}}$.

**2 вариант**

**1. Вычислите**:

а) $5\cdot 9^{\frac{1}{2}}$; б) $125^{-\frac{2}{3}}$; в) $\dfrac{(2^{-2})^{4}\cdot 16^{2}}{64^{\frac{1}{2}}}$;

г) $3\cdot(-27)^{\frac{1}{3}}-0{,}1\cdot 81^{\frac{3}{4}}+\sqrt[8]{1}$.

**2. Упростите выражение**:

а) $b^{\frac{1}{3}}\cdot b^{-\frac{1}{4}}$; б) $\dfrac{y^{\frac{2}{3}}\cdot y^{-1}}{y^{\frac{1}{3}}}$; в) $(a^{\frac{3}{4}})^{4}\cdot a^{-\frac{3}{2}}$;

г) $(27n^{-3})^{-\frac{1}{3}}$; д) $\dfrac{a^{3,2}\cdot a^{-2,8}}{a^{-2,6}\cdot a^{-2}}$.