Урок на тему «Иррациональные уравнения» (2 часа)

1. Иррациональные уравнения

Ранее мы рассматривали целые и дробно-рациональные уравнения. В них выражение с переменной НЕ могло находиться под знаком радикала, а также возводиться в дробную степень. Если же переменная оказывается под радикалом, то получается иррациональное уравнение.

Иррациональное уравнение – это уравнение, в котором выражение с переменной находится под корнем или возводится в дробную степень.

Приведем примеры иррациональных ур-ний:

$$\sqrt{x} = 25$$

$$\sqrt{x^2 - 8} = \sqrt[3]{9x + 7}$$

$$x^2 + 2x + \sqrt{x} - 14 = 0$$

$$x^{1,5} = -9$$

$$(4x^3 + x^2 - 5)^{4/3} = x^{2,7}$$

$$\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x} + x^{0,2} = 45$$

Заметим, что не всякое уравнение, содержащее радикалы, является иррациональным. В качестве примера можно привести

$$3x^2 + \sqrt{5}x + 9 = 0$$

Это не иррациональное, а всего лишь квадратное ур-ние. Дело в том, что под знаком радикала стоит только число 5, а переменных там нет.

2. Простейшие иррациональные уравнения

Начнем рассматривать способы решения иррациональных уравнений. В простейшем случае в нем справа записано число, а вся левая часть находится под знаком радикала. Выглядит подобное ур-ние так:

$$\sqrt[n]{f(x)} = a$$

где **a** – некоторое число (константа), f(x) – рациональное выражение.

Для его решения необходимо обе части возвести в степень **n**, тогда корень исчезнет:

$$\left(\sqrt[n]{f(x)}\right)^n = a^n$$

$$f(x) = a^n$$

Получаем рациональное ур-ние, решать которые мы уже умеем. Однако есть важное ограничение. Мы помним, что корень четной степени всегда равен положительному числу, и его нельзя извлекать из отрицательного числа. Поэтому, если в ур-нии

$$\sqrt[n]{f(x)} = a$$

n – четное число, то необходимо, чтобы **a** было положительным. Если же оно отрицательное, то ур-ние не имеет корней. Но на нечетные **n** такое ограничение не распространяется.

Пример. Решите ур-ние

$$\sqrt{x-5} = -6$$

Решение. Справа стоит отрицательное число (– 6), но квадратный корень (если быть точными, то *арифметический* квадратный корень) не может быть отрицательным. Поэтому ур-ние корней не имеет.

Ответ: корней нет.

Пример. Решите ур-ние

$$\sqrt{x-5} = 6$$

Решение. Теперь справа стоит положительное число, значит, мы имеем право возвести обе части в квадрат. При этом корень слева исчезнет:

$x – 5 = 6^2$

$x = 36 + 5$

$x = 41$

Ответ: 41.

Пример. Решите ур-ние

$$\sqrt[3]{x-5} = -6$$

Решение. Справа стоит отрицательное число, но это не является проблемой, ведь кубический корень может быть отрицательным. Возведем обе части в куб:

$x – 5 = (– 6)^3$

$x = – 216 + 5$

$x = – 211$

Ответ: – 211.

Конечно, под знаком корня может стоять и более сложное выражение, чем (x – 5).

Пример. Найдите решение ур-ния

$$\sqrt[5]{x^2 - 14x = 2}$$

Решение. Возведем обе части в пятую степень:

$x^2 – 14x = 2^5$

$x^2 - 14x - 32 = 0$

Получили квадратное ур-ние, которое можно решить с помощью дискриминанта:

$D = b^2 - 4ac = (-14)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-32) = 196 + 128 = 324$

$x_1 = (14 - 18)/2 = -2$

$x_2 = (14 + 18)/2 = 16$

Итак, нашли два корня: (– 2) и 16.

Ответ: (– 2); 16.

Несколько более сложным является случай, когда справа стоит не постоянное число, а какое-то выражение с переменной g(x). Алгоритм решения тот же самый – необходимо возвести в степень ур-ние, чтобы избавиться от корня. Но, если степень корня четная, то необходимо проверить, что полученные корни ур-ния не обращают правую часть, то есть g(x), в отрицательное число. В противном случае их надо отбросить как посторонние корни.

Пример. Решите ур-ние

$\sqrt{x - 2} = x - 4$

Решение. Возводим обе части во вторую степень:

$x - 2 = (x - 4)^2$

$x - 2 = x^2 - 8x + 16$

$x^2 - 9x + 18 = 0$

$D = b^2 - 4ac = (-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 18 = 81 - 72 = 9$

$x_1 = (9 - 3)/2 = 3$

$x_2 = (9 + 3)/2 = 6$

Получили два корня, 3 и 6. Теперь проверим, во что они обращают правую часть исходного ур-ния (x – 4):

при $x = 3$ $x - 4 = 3 - 4 = -1$

при $x = 6$ $6 - 4 = 6 - 4 = 2$

Корень x = 3 придется отбросить, так как он обратил правую часть в отрицательное число. В результате остается только x = 6.

Ответ: 6.

Пример. Решите ур-ние

$\sqrt[3]{3x^2 + 6x - 25} = 1 - x$

Решение. Здесь используется кубический корень, а потому возведем обе части в куб:

$3x^2 + 6x - 25 = (1 - x)^3$

$3x^2 + 6x - 25 = 1 - 3x + 3x^2 - x^3$

$x^3 + 9x - 26 = 0$

Получили кубическое ур-ние. Решить его можно методом подбора корня. Из всех делителей свободного коэффициента (– 26) только двойка обращает ур-ние в верное равенство:

$2^3 + 9 \cdot 2 - 26 = 0$

$8 + 18 - 26 = 0$

$0 = 0$

Других корней нет. Это следует из того факта, что функция $y = x^3 + 9x - 26$ является монотонной.

Заметим, что если подставить $x = 2$ в левую часть исходного ур-ния $1 - x$, то получится отрицательное число:

при $x = 2 \quad 1 - x = 1 - 2 = -1$

Но означает ли это, что число 2 НЕ является корнем? Нет, ведь кубический корень вполне может быть и отрицательным (в отличие от квадратного). На всякий случай убедимся, что двойка – это действительно корень исходного уравнения:

$$\sqrt[3]{3x^2 + 6x - 25} = 1 - x$$

$$\sqrt[3]{3 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 - 25} = 1 - 2$$

$$\sqrt[3]{12 + 12 - 25} = -1$$

$$\sqrt[3]{-1} = -1$$

$$-1 = -1$$

Ответ: 2.

3. Уравнения с двумя квадратными корнями

Ситуация осложняется, если в ур-нии есть сразу два квадратных корня. В этом случае их приходится убирать последовательно. Сначала мы переносим слагаемые через знак «=» таким образом, чтобы слева остался один из радикалов и *ничего, кроме него*. Возводя в квадрат такое ур-ние, мы избавимся от одного радикала, после чего мы получим более простое ур-ние. После получения всех корней надо проверить, какие из них являются посторонними. Для этого их надо просто подставить в исходное ур-ние.

Пример. Решите ур-ние

$$\sqrt{5x + 1} - \sqrt{13 - 3x} = 2$$

Решение. Перенесем вправо один из корней:

$$\sqrt{5x + 1} = 2 + \sqrt{13 - 3x}$$

Возведем обе части в квадрат. Обратите внимание, что левый корень при этом исчезнет, а правый – сохранится:

$$\left(\sqrt{5x+1}\right)^2 = \left(2+\sqrt{13-3x}\right)^2$$

$$5x+1 = 2^2 + 2 \bullet 2 \bullet \sqrt{13-3x} + \left(\sqrt{13-3x}\right)^2$$

$$5x+1 = 4 + 4\sqrt{13-3x} + 13 - 3x$$

Теперь снова перемещаем слагаемые так, чтобы в одной из частей не осталось ничего, кроме корня:

$$5x+1 = 4 + 4\sqrt{13-3x} + 13 - 3x$$

$$5x + 1 - 4 - 13 + 3x = 4\sqrt{13-3x}$$

$$8x - 16 = 4\sqrt{13-3x}$$

Поделим на 4:

$$2x - 4 = \sqrt{13-3x}$$

Снова возведем ур-ние в квадрат, чтобы избавиться и от второго корня:

$(2x – 4)^2 = 13 – 3x$

$4x^2 – 16x + 16 = 13 – 3x$

$4x^2 – 13x + 3 = 0$

$D = b^2– 4ac = (– 13)^2 – 4•4•3 = 169 –48 = 121$

$x_1 = (13 – 11)/8 = 0,25$

$x_2 = (13 + 11)/8 = 3$

Имеем два корня: 3 и 0,25. Но вдруг среди них есть посторонние? Для проверки подставим их в исходное ур-ние. При x = 0,25 имеем:

$$\sqrt{5 \bullet 0{,}25 + 1} - \sqrt{13 - 3 \bullet 0{,}25} = 2$$

$$\sqrt{2{,}25} - \sqrt{12{,}25} = 2$$

$$1{,}5 – 3{,}5 = 2$$

$$–2 = 2$$

Получилось ошибочное равенство, а это значит, что 0,25 не является корнем ур-ния. Далее проверим x = 3

$$\sqrt{5 \bullet 3 + 1} - \sqrt{13 - 3 \bullet 3} = 2$$

$$\sqrt{16} - \sqrt{4} = 2$$

$$4 – 2 = 2$$

$$2 = 2$$

На этот раз получилось справедливое равенство. Значит, тройка является корнем ур-ния.

Ответ: 3

Самостоятельная работа «Иррациональные уравнения»

Вариант 1

1) $\sqrt{5x+1}=3$

2) $\sqrt{2x+3}=x$

3) $x+1=\sqrt{8-4x}$

4) $\sqrt{7x+1}=\sqrt{3x+4}$

5) $\sqrt{x+17}-\sqrt{x+1}=2$

6) $\sqrt{1-x}-\sqrt{13+x}=\sqrt{x+4}$

Вариант 2

1) $\sqrt{3x-1}=2$

2) $\sqrt{6-x}=x$

3) $x-1=\sqrt{6+2x}$

4) $\sqrt{5x-1}=\sqrt{3x+19}$

5) $\sqrt{x+13}-\sqrt{x+1}=2$

6) $\sqrt{3x+4}-\sqrt{x-4}=2\sqrt{x}$