Урок на тему «Упрощение выражений»

Вспомним основные факты, связанные с видами чисел, которые будут нам полезны.

Определение степени с целым показателем – для любого $a \neq 0$:

$$a^0 = 1$$

$$a^{-k} = \frac{1}{a^k}$$

Стандартный вид числа – запись числа в виде:

$a \cdot 10^n$,

где $1 \leq a < 10$, n – целое.

Арифметический квадратный корень $\sqrt{a}$ – это такое неотрицательное число, которое при возведении в квадрат дает a:

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a, a \geq 0$$

Рациональными числами называют числа, которые можно представить в виде дроби $\frac{m}{n}$, где m – целое число, n – натуральное. Числа, которые нельзя представить в таком виде, называют **иррациональными**.

Иррациональные и рациональные числа вместе образуют множество **действительных** (или **вещественных**) чисел.

Перейдем к решению примеров.

Задание 1. Записать числа в порядке возрастания:

$$-\sqrt{16}\,; -\frac{164}{4};\ \sqrt{3};\ \frac{4}{9};\ 0,(3);\ -5,77;\ \sqrt{7}$$

Указать все иррациональные числа.

Решение.

Сравнивать числа можно несколькими способами. Например, определяя знак их разности: если $a - b > 0$, то $a > b$, и наоборот.

Другой способ – сравнение чисел, записанных в одном формате. Например, удобно сравнивать числа, которые записаны в виде десятичных дробей.

Упростим сначала некоторые из представленных чисел:

$-\sqrt{16} = -\sqrt{4^2} = -4$

$-\frac{164}{4} = -41$

Мы знаем, что отрицательные числа всегда меньше положительных. Поэтому три наименьших числа из данного набора: $-41; -5{,}77; -4$ (именно в таком порядке) (см. рис. 1).

Рис. 1. Иллюстрация к примеру 1

Осталось сравнить числа $\sqrt{3}; \frac{4}{9}; 0,(3); \sqrt{7}$. Сначала определим промежутки, в которых будут расположены корни (оценим их значения):

$1^2 = 1 < 3$

$2^2 = 4 > 3$

Таким образом, $\sqrt{3}$, т. е. число, которое нужно возвести в квадрат, чтобы получить 3, находится в промежутке от 1 до 2 (см. рис. 2).

Рис. 2. Иллюстрация к примеру 1

Аналогично:

$2^2 = 4 < 7$

$3^2 = 9 > 7$

Получим, что $\sqrt{7}$ лежит в промежутке от 2 до 3 (см. рис. 3).

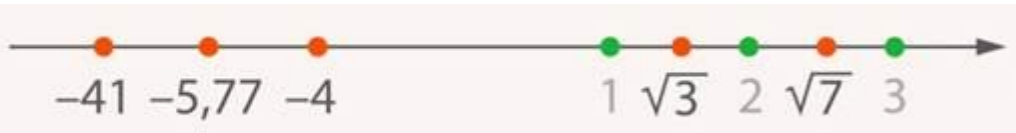

Рис. 3. Иллюстрация к примеру 1

Понятно, что и правильная дробь $\frac{4}{9}$, и бесконечная периодическая дробь $0,(3)$ меньше 1, а значит, меньше чем $\sqrt{3} < \sqrt{7}$.

Осталось сравнить числа $\frac{4}{9}$ и $0,(3)$. Более простой способ, конечно, состоит в том, чтобы разделить в столбик 4 на 9 и получить эквивалентную десятичную запись обыкновенной дроби $\frac{4}{9} = 0,(4)$. И сразу ясно, что $0,(3) < \frac{4}{9}$ (см. рис. 4).

Рис. 4. Иллюстрация к примеру 1

Но мы потренируемся переводить бесконечную периодическую дробь $0,(3)$ в обыкновенную. Пусть $A = 0,(3)$, тогда $10A = 3,(3)$.

Если вычесть из второго равенства первое, получим:

$$9A = 3$$

Откуда:

$$A = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Также ясно, что:

$$\frac{3}{9} < \frac{4}{9}$$

Итак, запишем итоговый порядок чисел:

$$-\frac{164}{4} < -5,77 < -\sqrt{16} < 0,(3) < \frac{4}{9} < \sqrt{3} < \sqrt{7}$$

Осталось найти иррациональные числа. Вспомним, что это числа, которые нельзя представить в виде дроби $\frac{m}{n}$, где m – целое число, n – натуральное. Можно привести и эквивалентное определение: это те числа, которые нельзя представить в виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби. Понятно, что $-\frac{164}{4}; -5,77; 0,(3); \frac{4}{9}$ –

рациональные числа. В таких заданиях главное не ошибиться с определением вида числа $-\sqrt{16}$.

Обычно мы будем сталкиваться с иррациональными числами, которые записываются с использованием квадратных корней. Но не любое число, в записи которого используется квадратный корень, будет иррациональным.

$-\sqrt{16} = -4$ – хороший пример. Это не просто рациональное число, а целое: $-4 \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, хотя записано с использованием квадратного корня.

А вот корни $\sqrt{3}, \sqrt{7}$, действительно, эквивалентно представить в виде дроби не получится. Поэтому эти числа будут иррациональными.

Ответ: $-\frac{164}{4} < -5{,}77 < -\sqrt{16} < 0,(3) < \frac{4}{9} < \sqrt{3} < \sqrt{7}$; числа $\sqrt{3}, \sqrt{7}$ иррациональные.

Задание 2. Вычислить значение выражения:

$$5^2 \cdot (0{,}5)^{-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0$$

Записать результат в стандартном виде.

Решение.

По определению степени с отрицательным показателем:

$$(0{,}5)^{-1} = \frac{1}{0{,}5^1} = \frac{1}{0{,}5}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^3} = \left(\frac{4}{1}\right)^3$$

По определению нулевой степени:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$$

Таким образом:

$$5^2 \cdot (0{,}5)^{-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 5^2 \cdot \frac{1}{0{,}5} + \left(\frac{4}{1}\right)^3 \cdot 1 = 25 \cdot 2 + 64 \cdot 1 = 50 + 64 = 114$$

Запишем число 114 в стандартном виде. Для этого поставим запятую так, чтобы полученное число a удовлетворяло неравенству: $1 \le a < 10$. Получим $1{,}14$. Чтобы получить исходное число, нужно умножить $1{,}14$ на 100 (сдвинули запятую на два знака влево, значит, нужно умножить на 10^2):

$$114 = 1{,}14 \cdot 100 = 1{,}14 \cdot 10^2$$

Ответ: $1{,}14 \cdot 10^2$.

1. Упрощение дробно-рациональных выражений

Теперь рассмотрим задания на упрощение дробно-рациональных выражений. Алгоритм работы с ними такой же, как и с обычными дробями. Вспомним его.

Алгоритм упрощения дробно-рациональных выражений

1. Дробь можно упростить, разложив на множители ее числитель и знаменатель и сократив одинаковые множители:

$$\frac{a^2-1}{a^2-a} = \frac{(a-1)(a+1)}{a(a-1)} = \frac{a+1}{a} = \frac{a}{a} + \frac{1}{a} = 1 + \frac{1}{a}, a \neq 1$$

2. Для сложения и вычитания дробей нужно привести их к общему знаменателю:

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{a-1} = \frac{a-1}{(a-1)(a+1)} + \frac{a+1}{(a-1)(a+1)} = \frac{a-1+a+1}{(a-1)(a+1)} = \frac{2a}{(a-1)(a+1)}$$

3. Для умножения двух дробей нужно перемножить их числители и знаменатели. Соответственно, при возведении дроби в степень необходимо возвести в степень и числитель, и знаменатель:

$$\frac{a-1}{a} \cdot \frac{a^2}{a+1} = \frac{(a-1)a^2}{a(a+1)} = \frac{(a-1)a}{a+1}, a \neq 0$$

4. Чтобы разделить выражение на дробь, нужно умножить его на обратную дробь.

При этом нам пригодятся уже полученные навыки разложения многочленов на множители:

$$\frac{a}{a+1} : \frac{a}{a-1} = \frac{a}{a+1} \cdot \frac{a-1}{a} = \frac{a(a-1)}{(a+1)a} = \frac{a-1}{a+1}, a \neq 0, a \neq 1$$

Задание 3. Сократить дробь:

$$\frac{30a^2 + 60ab + 30b^2}{9a^2 - 9b^2}$$

Указать допустимые значения переменных в исходной дроби и в выражении, которое получится после упрощения.

Решение.

Для сокращения дроби необходимо разложить на множители числитель и знаменатель.

Рассмотрим числитель. Вынесем общий множитель 30 за скобки и применим формулу сокращенного умножения (квадрат суммы): $30a^2+60ab+30b^2=30(a^2+2ab+b^2)=30(a+b)^2=30(a+b)(a+b)$

Разложим знаменатель на множители. Вынесем общий множитель 9 за скобки и применим формулу сокращенного умножения (разность квадратов):

$9a^2-9b^2=9(a^2-b^2)=9(a-b)(a+b)$

Таким образом:

$$\frac{30a^2+60ab+30b^2}{9a^2-9b^2}=\frac{30(a+b)(a+b)}{9(a-b)(a+b)}$$

Чтобы данное выражение имело смысл, необходимо, чтобы знаменатель дроби не равнялся нулю. Соответственно, $a-b\neq 0$ и $a+b\neq 0$. Или: $a\neq b$ и $a\neq -b$.

Сократим дробь, разделив числитель и знаменатель на общие множители.

Разделим числитель и знаменатель на $(a+b)$. Обратите внимание, что при этом $a\neq -b$, поскольку на 0 делить нельзя:

$$\frac{30(a+b)(a+b)}{9(a-b)(a+b)}=\frac{30(a+b)}{9(a-b)}$$

Еще можно сократить числитель и знаменатель дроби на 3:

$$\frac{30(a+b)}{9(a-b)}=\frac{10(a+b)}{3(a-b)}$$

Рассмотрим допустимые значения переменных. Знаменатель не равен нулю, т. е. $a\neq b$.

Как видите, области допустимых значений отличаются. Т. е. преобразование $\frac{30a^2+60ab+30b^2}{9a^2-9b^2}=\frac{10(a+b)}{3(a-b)}$ не является тождественным. Чтобы оно стало тождественным, необходимо дополнительно указать, что $a\neq -b$.

Ответ: $\frac{10(a+b)}{3(a-b)}, a\neq -b$. ОДЗ исходного выражения: $a\neq -b$ и $a\neq b$. ОДЗ выражения после сокращения: $a\neq b$.

Задание 4. Найти значение выражения при $a = -0{,}6$:

$$\frac{18}{9-4a^2} - \frac{4}{2a+3} + \frac{3}{2a-3}$$

Решение.

Сначала упростим исходное выражение. Для сложения и вычитания дробей приведем их к общему знаменателю. Для этого разложим знаменатели на множители.

Разложим знаменатель первой дроби на множители, используя формулу разности квадратов:

$$9 - 4a^2 = 3^2 - (2a)^2 = (3-2a)(3+2a)$$

Полученные множители похожи на знаменатели второй и третьей дроби. Чтобы они полностью совпадали, вынесем из первой скобки знак «минус» и поменяем местами получившиеся слагаемые:

$$(3-2a)(3+2a) = -(-3+2a)(3+2a) = -(2a-3)(2a+3)$$

Получаем:

$$\frac{18}{9-4a^2} - \frac{4}{2a+3} + \frac{3}{2a-3} = \frac{18}{-(2a-3)(2a+3)} - \frac{4}{2a+3} + \frac{3}{2a-3}$$

Приведем все дроби к общему знаменателю $-(2a-3)(2a+3)$. Во втором слагаемом умножим числитель и знаменатель на $-(2a-3)$, в третьем – на $-(2a+3)$:

$$\frac{18}{-(2a-3)(2a+3)} - \frac{4}{2a+3}^{\backslash -(2a-3)} + \frac{3}{2a-3}^{\backslash -(2a+3)}$$
$$= \frac{18}{-(2a-3)(2a+3)} - \frac{4\cdot\big(-(2a-3)\big)}{-(2a-3)(2a+3)} + \frac{3\cdot\big(-(2a+3)\big)}{-(2a-3)(2a+3)}$$
$$= \frac{18 - 4\cdot\big(-(2a-3)\big) + 3\cdot\big(-(2a+3)\big)}{-(2a-3)(2a+3)}$$

Упростим числитель:

$$18 - 4\cdot\big(-(2a-3)\big) + 3\cdot\big(-(2a+3)\big) = 18 + 4(2a-3) - 3\cdot(2a+3)$$
$$= 18 + 8a - 12 - 6a - 9 = 2a - 3$$

Получаем:

$$\frac{2a-3}{-(2a-3)(2a+3)}$$

Полученное выражение можно разделить на $2a-3$. И поскольку $a=-0{,}6$, то деление на 0 мы не выполним, получаем:

$$\frac{1}{-(2a+3)}$$

Мы максимально упростили выражение (т. е. уменьшили количество действий, которое необходимо выполнить, чтобы вычислить значение выражения). Теперь подставим значение $a=-0{,}6$:

$$\frac{1}{-(2a+3)}=\frac{1}{-(2\cdot(-0{,}6)+3)}=\frac{1}{-1{,}8}=-\frac{1}{\frac{18}{10}}=-\frac{10}{18}=-\frac{5}{9}$$

Ответ: $-\frac{5}{9}$.

Задание 5. Выполнить действия и упростить полученное выражение:

$$(x^2-4):\frac{3x^2+6x}{x^3}\cdot\frac{12}{4-4x+x^2}$$

Решение.

Выполним действия поочередно – сначала деление, затем умножение:

$$\overbrace{\overbrace{(x^2-4):\frac{3x^2+6x}{x^3}}^{1}\cdot\frac{12}{4-4x+x^2}}^{2}$$

Действие 1. Деление на дробь заменим умножением на обратную (перевернутую):

$$(x^2-4):\frac{3x^2+6x}{x^3}=(x^2-4)\cdot\frac{x^3}{3x^2+6x}$$

Для удобства представим первый множитель в виде дроби:

$$(x^2-4)\cdot\frac{x^3}{3x^2+6x}=\frac{(x^2-4)}{1}\cdot\frac{x^3}{3x^2+6x}$$

Для умножения дробей необходимо умножить их числители и знаменатели:

$$\frac{(x^2-4)}{1}\cdot\frac{x^3}{3x^2+6x}=\frac{(x^2-4)\cdot x^3}{1\cdot(3x^2+6x)}=\frac{(x^2-4)\cdot x^3}{3x^2+6x}$$

Действие 2. Опять же, для умножения дробей перемножим их числители и знаменатели:

$$\frac{(x^2-4)\cdot x^3}{3x^2+6x}\cdot\frac{12}{4-4x+x^2}=\frac{(x^2-4)\cdot x^3\cdot 12}{(3x^2+6x)(4-4x+x^2)}$$

Мы выполнили все действия. Осталось упростить полученное выражение. Для этого разложим числитель и знаменатель полученной дроби.

Рассмотрим числитель:

$$(x^2-4)\cdot x^3\cdot 12$$

Первый множитель разложим по формуле разности квадратов:

$$x^2-4=(x-2)(x+2)$$

В итоге получаем:

$$12(x-2)(x+2)x^3$$

Разложим знаменатель на множители:

$$(3x^2+6x)(4-4x+x^2)$$

В выражении $3x^2+6x$ есть общий множитель $3x$, который можно вынести за скобки:

$$3x^2+6x=3x(x+2)$$

Во второй скобке стоит квадрат разности:

$$4-4x+x^2=x^2-4x+4=(x-2)^2$$

В итоге получаем знаменатель:

$$3x(x+2)(x-2)^2$$

А вся дробь принимает вид:

$$\frac{(x^2-4)\cdot x^3\cdot 12}{(3x^2+6x)(4-4x+x^2)}=\frac{12x^3\cdot(x-2)(x+2)}{3x\cdot(x+2)(x-2)^2}$$

Видим общие множители. Упростим выражение, сократив числитель и знаменатель на $3x(x-2)(x+2)$.

$$\frac{\cancel{12}\cdot \cancel{x^3}\cdot\cancel{(x-2)(x+2)}}{\cancel{3x(x+2)}\cdot(x-2)^{\cancel{2}}}=\frac{4x^2}{x-2}$$

Ответ: $\frac{4x^2}{x-2}$.

Задание 6. Упростить выражение:

$$\left(\frac{a-3}{7a-4}-\frac{a-3}{a-4}\right)\cdot\frac{7a-4}{9a-3a^2}+\frac{2a(a^2-14)}{16-8a+a^2}:\frac{3a-a}{(4-a)}$$

Решение.

Выполним упрощение по действиям:

$$\overbrace{\overbrace{\overbrace{\left(\frac{a-3}{7a-4}-\frac{a-3}{a-4}\right)}^{1}\cdot\frac{7a-4}{9a-3a^2}}^{2}+\overbrace{\frac{2a(a^2-14)}{16-8a+a^2}:\frac{3a-a}{(4-a)}}^{3}}^{4}$$

Действие 1. Для вычитания дробей приведем их к общему знаменателю:

$$\frac{a-3}{7a-4}^{\backslash a-4}-\frac{a-3}{a-4}^{\backslash 7a-4}=\frac{(a-3)(a-4)}{(7a-4)(a-4)}-\frac{(a-3)(7a-4)}{(7a-4)(a-4)}$$
$$=\frac{(a-3)(a-4)-(a-3)(7a-4)}{(7a-4)(a-4)}$$

Упростим полученную дробь, для этого вынесем общий множитель $(a-3)$ в числителе:

$$\frac{(a-3)(a-4)-(a-3)(7a-4)}{(7a-4)(a-4)}=\frac{(a-3)(a-4-7a+4)}{(7a-4)(a-4)}=\frac{-6a(a-3)}{(7a-4)(a-4)}$$

Действие 2. Выполним умножение:

$$\frac{-6a(a-3)}{(7a-4)(a-4)}\cdot\frac{7a-4}{9a-3a^2}=\frac{-6a(a-3)(7a-4)}{(7a-4)(a-4)(9a-3a^2)}$$

Сразу видим общий множитель $(7a-4)$, на который можно сократить дробь:

$$\frac{-6a(a-3)(7a-4)}{(7a-4)(a-4)(9a-3a^2)}=\frac{-6a(a-3)}{(a-4)(9a-3a^2)}$$

Во втором множителе в знаменателе можно вынести за скобки выражение $3a$:

$$9a-3a^2=3a(3-a)$$

Получим:

$$\frac{-6a(a-3)}{(a-4)\cdot(9a-3a^2)}=\frac{-6a(a-3)}{3a(3-a)(a-4)}$$

Можно сократить на $3a$:

$$\frac{-6a(a-3)}{3a(3-a)(a-4)} = \frac{-2(a-3)}{(3-a)(a-4)}$$

Обратим внимание на множители $a-3$ и $3-a$. Можем вынести знак «минус» за скобки, чтобы в дальнейшем их сократить:

$$3-a = -(-3+a) = -(a-3)$$

Получим:

$$\frac{-2(a-3)}{(3-a)(a-4)} = \frac{-2(a-3)}{-(a-3)(a-4)} = \frac{2}{a-4}$$

Действие 3. Заменим операцию деления умножением на обратную дробь:

$$\frac{2a(a^2-14)}{16-8a+a^2} : \frac{3a-a}{4-a} = \frac{2a(a^2-14)}{16-8a+a^2} \cdot \frac{4-a}{3a-a} = \frac{2a(a^2-14)(4-a)}{(16-8a+a^2)(3a-a)}$$

Упростим полученную дробь

1. В первом множителе знаменателя видим формулу квадрата разности:

$$16-8a+a^2 = (4-a)^2$$

2. Во втором множителе в знаменателе есть подобные слагаемые:

$$3a-a = 2a$$

3. В числителе есть выражение a^2-14, к которому можно было бы применить формулу разности квадратов. Но число 14 неудобно представлять в виде квадрата, только как $\left(\sqrt{14}\right)^2$. А поскольку в условии больше нигде нет выражений с корнями, то подобное разложение на множители не потребуется.

В итоге получим дробь:

$$\frac{2a(a^2-14)(4-a)}{(16-8a+a^2)(3a-a)} = \frac{2a(a^2-14)(4-a)}{(4-a)^2 \cdot 2a}$$

Сократим на общие множители $4-a$ и $2a$:

$$\frac{2a(a^2-14)(4-a)}{(4-a)^2 \cdot 2a} = \frac{a^2-14}{4-a}$$

Действие 4. Выполним сложение:

$$\frac{2}{a-4}+\frac{a^2-14}{4-a}$$

Для сложения дробей приведем их к общему знаменателю. Знаменатели одинаковы с точностью до знака, поэтому достаточно числитель и знаменатель второй дроби умножить на -1:

$$\frac{2}{a-4}+\frac{a^2-14}{4-a}^{\backslash -1}=\frac{2}{a-4}+\frac{-(a^2-14)}{-(4-a)}=\frac{2}{a-4}+\frac{-a^2+14}{a-4}=\frac{2-a^2+14}{a-4}=\frac{16-a^2}{a-4}$$

Упростим полученное выражение – используем формулу разности квадратов:

$$\frac{16-a^2}{a-4}=\frac{(4-a)(4+a)}{a-4}=\frac{-(a-4)(4+a)}{a-4}=-4-a$$

Ответ: $-4-a$.

Заключение

Итак, как вы убедились, для выполнения задания с дробно-рациональными выражениями вам необходимо уметь:

1. раскладывать многочлены на множители;
2. уметь выполнять действия с дробями: приводить к общему знаменателю, умножать и делить дроби.

Все остальное уже техника, которая нарабатывается решением достаточного количества примеров.

Домашнее задание

1. Вычислить:

$$\sqrt{\frac{\left(\left(3,(48)\right)^{-1}\cdot\sqrt{25}:\frac{132}{161}+0,25\right)^2}{0,(2)}+7}$$

2. Упростить выражение:

$$\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)(x^2+2x+1)$$

3. Доказать тождество:

$$\left(\frac{x+5}{5x-1}-\frac{x+5}{x+1}\right):\frac{x^2+5x}{1-5x}+\frac{x^2+5}{x+1}=x-1$$