7 класс

Задача 7.1. Встреча друзей.

Малыш и Карлсон договорились встретиться после обеда. В 13:00 Карлсон со скоростью $2v$ вылетел из дома. Навстречу ему из школы в 13:10 вышел Малыш со скоростью v. Пролетев треть пути от дома до школы, Карлсон вспомнил, что не доел варенье, и вернулся домой. Потратив на перекус 20 минут, сытый и довольный, он продолжил свой путь. Определите скорость Малыша и расстояние от дома до места встречи друзей, если расстояние от дома до школы равно 3,6 км, а встреча друзей произошла в 14:10. Скорость полёта Карлсона не менялась.

Ответ: 2,25 км/ч; 1,35 км.

Решение: Пусть расстояние от дома до места встречи равно s. Тогда за время $14{:}10 - 13{:}10 = 1$ ч Малыш прошёл расстояние $s_{\text{М}} = 3{,}6\text{ км} - s$ со скоростью v. Карлсон добирался до места встречи на 10 мин больше, но из них 20 мин он потратил на перекус. Соответственно, со скоростью $2v$ Карлсон двигался 5/6 часа. Расстояние, пройденное им, равно $s_{\text{К}} = 2{,}4\text{ км} + s$. Отсюда получаем, что

$$2v = \frac{2{,}4\text{ км} + s}{5/6\text{ ч}}, \quad v = \frac{3{,}6\text{ км} - s}{1\text{ ч}} \quad \Rightarrow \quad s = 1{,}35\text{ км}, \quad v = 2{,}25\text{ км/ч}.$$

Критерии:

Найден путь, пройденный Карлсоном . . . . 3 балла
Найдено время движения Малыша . . . . 1 балл
Найдено время движения Карлсона . . . . 2 балла
Найдено расстояние до места встречи . . . . 2 балла
Найдена скорость Малыша . . . . 2 балла

Задача 7.2. Средняя скорость.

Кот Леопольд в воскресенье утром поехал отдыхать на дачу. Мыши, следившие за каждым его шагом, заметили, что треть всего времени автомобиль Леопольда ехал со скоростью 15 м/с, затем четверть **оставшегося пути** — со скоростью 1000 м/мин, а остаток дороги — со скоростью 45 км/ч. Найти среднюю скорость автомобиля кота Леопольда на всём пути.

Ответ: 50 км/ч.

Решение: Так как второй участок составляет четверть оставшегося пути, а третий участок, соответственно, три четверти, то $s_3 = 3s_2$. Подставим сюда выражения для s_2 и s_3 через время и скорость на соответствующем участке:

$$v_3 t_3 = 3v_2 t_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{t_3}{t_2} = \frac{3v_2}{v_3} = \frac{3 \cdot 60\text{ км/ч}}{45\text{ км/ч}} = 4.$$

С другой стороны, $t_2 + t_3 = 2t/3$, где t — всё время движения. Отсюда находим, что

$$t_2 + 4t_2 = \frac{2t}{3} \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{2t}{15}, t_3 = \frac{8t}{15}.$$

Весь путь, пройденный Леопольдом, составляет

$$s = v_1 t_1 + v_2 t_2 + v_3 t_3 = 54\,\frac{\text{км}}{\text{ч}} \cdot \frac{t}{3} + 60\,\frac{\text{км}}{\text{ч}} \cdot \frac{2t}{15} + 45\,\frac{\text{км}}{\text{ч}} \cdot \frac{8t}{15},$$

следовательно, его средняя скорость на всём пути равна

$$v_{\text{ср}} = \frac{s}{t} = 54\,\frac{\text{км}}{\text{ч}} \cdot \frac{1}{3} + 60\,\frac{\text{км}}{\text{ч}} \cdot \frac{2}{15} + 45\,\frac{\text{км}}{\text{ч}} \cdot \frac{8}{15} = 50\,\frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

Критерии:

Записана связь между s_2 и s_3 . . . . 1 балл
Найдена связь между t_2 и t_3 . . . . 2 балла
Найдены t_2 и t_3 как доли всего времени . . . . 3 балла
Найдено выражение для всего пути . . . . 2 балла
Найдена средняя скорость . . . . 2 балла

Задача 7.3. Физики всех миров, объединяйтесь!

На межпланетном слёте физиков учёный с планеты Орбитар измерил кубик и сообщил, что длина стороны кубика в стандартных единицах его планеты равна 5 трямзикам, а масса кубика — 12,5 амма. Его коллега с планеты Дагон измерил тот же кубик и сказал, что длина стороны кубика — 2 грима, а масса — 16 илов. Пользуясь этими данными определите как пересчитывать плотность, определённую на планете Орбитар, в единицы, принятые на планете Дагон.

Ответ: 1 амм/трямзик^3 = 20 ил/грим^3.

Решение: В единицах планеты Орбитар объём кубика равен 125 кубических трямзиков. Так как масса кубика равна 12,5 аммов, то его плотность составляет 0,1 амм/трямзик^3. В единицах планеты Дагон: объём — 8 кубических гримов, а плотность — 2 ил/грим^3. Так как кубик один и тот же, то

$$0{,}1\ \frac{\text{амм}}{\text{трямзик}^3} = 2\ \frac{\text{ил}}{\text{грим}^3} \quad \Rightarrow \quad 1\ \frac{\text{амм}}{\text{трямзик}^3} = 20\ \frac{\text{ил}}{\text{грим}^3}.$$

Критерии:

Найден объём в единицах Орбитара . . . . 2 балла
Найден объём в единицах Дагона . . . . 2 балла
Вычислена плотность в единицах Орбитара . . . . 2 балла
Вычислена плотность в единицах Дагона . . . . 2 балла
Найдена формула для перевода единиц плотности . . . . 2 балла

Задача 7.4. Встречные поезда.

В 8 часов утра со станции Арбузово в направлении станции Тыквино вышел поезд. Через некоторое время со станции Тыквино навстречу ему вышел другой поезд. Графики зависимости скорости обоих поездов от времени приведены на рис. 7.1. Во сколько эти поезда встретятся? На каком расстоянии от Арбузово это произойдёт? Расстояние между станциями равно 52 км.

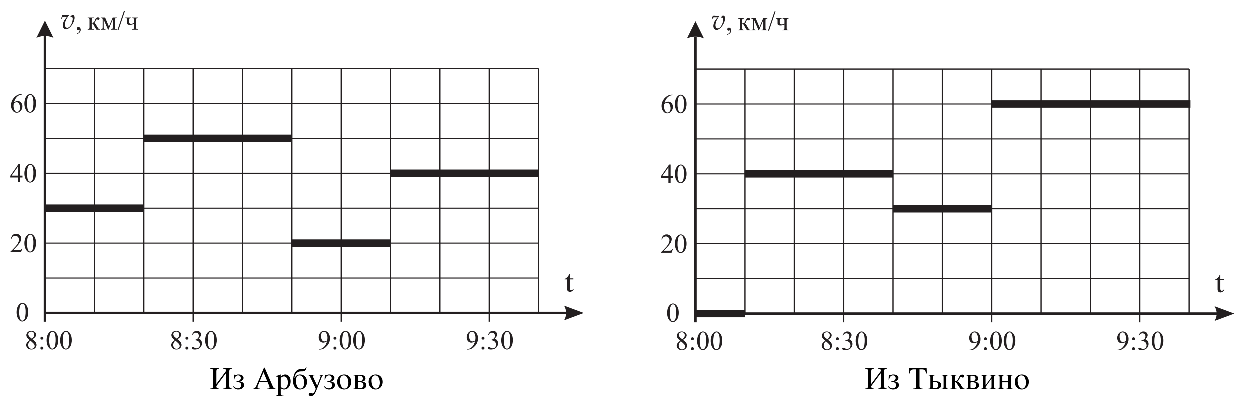


Рис. 7.1.

Ответ: В 8:44; 30 км.

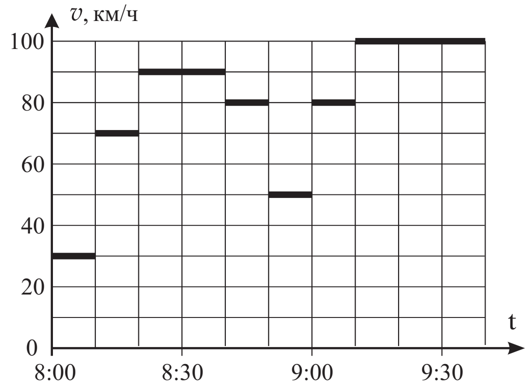


Рис. 7.2.

Решение: Так как поезда идут навстречу друг другу, скорость их сближения равна сумме скоростей поездов в данный момент времени. Чтобы проанализировать сближение поездов и найти время встречи, нарисуем график зависимости скорости сближения от времени (рис. 7.2). До 8:40 путь, пройденный одним поездом относительно второго, составляет

$$30\ \frac{\text{км}}{\text{ч}} \cdot \frac{1}{6}\ \text{ч} + 70\ \frac{\text{км}}{\text{ч}} \cdot \frac{1}{6}\ \text{ч} + 90\ \frac{\text{км}}{\text{ч}} \cdot \frac{1}{3}\ \text{ч} = 46\frac{2}{3}\ \text{км}.$$

Это меньше, чем 52 км. Следующие 10 мин поезда сближаются со скоростью 80 км/ч. Найдём время, оставшееся до встречи

$$\frac{52\ \text{км} - 46\frac{2}{3}\ \text{км}}{80\ \text{км/ч}} = \frac{1}{15}\ \text{ч} = 4\ \text{мин}.$$

Отсюда получаем, что встреча поездов произойдёт в 8:44. Чтобы найти расстояние от Арбузово до места встречи, найдём по рисунку в условии задачи путь, пройденный первым поездом:

$$30\ \frac{\text{км}}{\text{ч}} \cdot 20\ \text{мин} + 50\ \frac{\text{км}}{\text{ч}} \cdot 24\ \text{мин} = 30\ \text{км}.$$

Критерии:

Рассмотрено сближение поездов (напр., построен график относительной скорости) . 2 балла
Показано, что встреча произойдёт между 8:40 и 8:50 . . . . 2 балла
Найдено время встречи . . . . 3 балла
Найдено расстояние до места встречи . . . . 3 балла

Максимально возможный балл в 7 классе 40

8 класс

Задача 8.1. Плотность дерева.

Мерный сосуд был частично заполнен водой (рис. 8.1а). В него на ниточке опустили деревянный кубик, не касаясь им дна и стенок сосуда. Часть воды при этом вылилась. После того как кубик вынули, в мерном сосуде остался новый объём воды (рис. 8.1б). Чему равна минимально возможная плотность дерева, из которого сделан кубик, если его объём равен 50 см^3? Плотность воды равна 1000 кг/м^3.

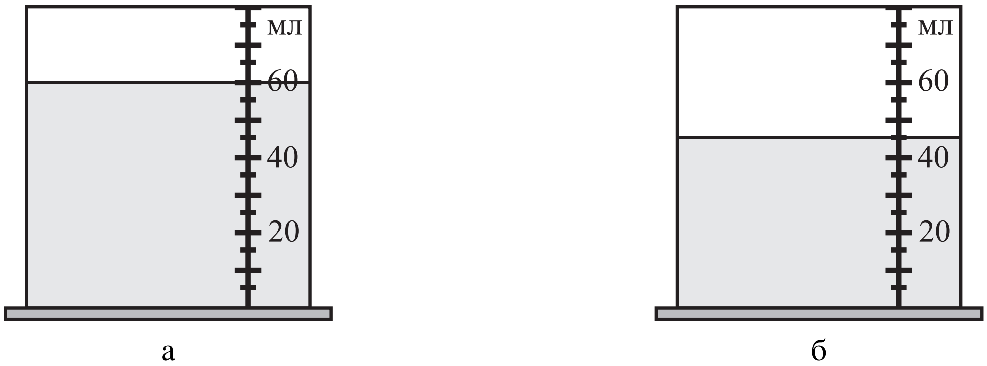


Рис. 8.1.

Ответ: 700 кг/м^3.

Решение: Как следует из рисунков, приведённых в условии, погруженый в воду кубик вытесняет $V_{\text{погр}} = 35$ см^3. В предельном случае, когда $\rho_{\text{д}}$ — минимально возможная плотность кубика, полученный объём является максимальным объёмом погруженной части. Так как $V_{\text{погр}}$ меньше, чем объём кубика $V = 50$ см^3, кубик плавает в воде. Из условия плавания кубика получаем

$$\rho_{\text{д}} g V = \rho_{\text{в}} g V_{\text{погр}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho_{\text{д}}}{\rho_{\text{в}}} = \frac{V_{\text{погр}}}{V} = 0{,}7 \quad \Rightarrow \quad \rho_{\text{д}} = 700\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Критерии:

Найден объём погруженной части кубика . . . . 2 балла
Показано, что кубик плавает . . . . 2 балла
Записано условие плавания . . . . 3 балла
Найдена плотность кубика . . . . 3 балла

Задача 8.2. Равновесие изогнутого стержня.

Тонкий однородный стержень, согнутый в форме буквы «Г» (см. рис. 8.2), уравновешен на опоре с помощью груза массой $m = 240$ г, прикреплённого к левому концу стержня. Какова масса стержня? Для удобства на стержень нанесены штрихи, делящие его на равные части.

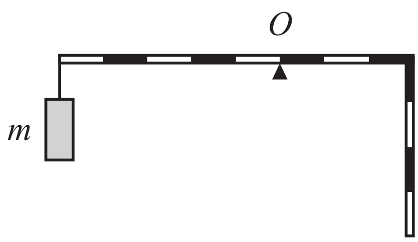


Рис. 8.2.

Ответ: 3,6 кг.

Решение: Пусть M — масса стержня, а x — длина одного деления. Тогда масса левой части стержня равна $5M/12$, масса правой горизонтальной части — $3M/12$, вертикальной части — $4M/12$. Запишем правило моментов

$$mg \cdot 5x + \frac{5Mg}{12} \cdot \frac{5x}{2} = \frac{3Mg}{12} \cdot \frac{3x}{2} + \frac{4Mg}{12} \cdot 3x \quad \Rightarrow \quad 5m + \frac{25M}{24} = \frac{3M}{8} + M.$$

Выражая отсюда массу стержня, получаем

$$M = 15m = 3{,}6 \text{ кг}.$$

Критерии:

Найдены массы составных частей стержня . . . . 2 балла
Записано правило моментов . . . . 5 баллов
Найдена масса стержня . . . . 3 балла

Задача 8.3. Исследуем свойства парафина.

Экспериментатор Иннокентий Иванов решил исследовать тепловые свойства чистого парафина. Для этого он взял теплоизолированный сосуд со встроенным внутрь нагревателем, налил туда 1 кг воды при температуре 0 ℃ и положил кусок исследуемого вещества массой 500 г при температуре 20 ℃. Дождавшись установления теплового равновесия, Иннокентий включил нагреватель и начал измерять температуру содержимого. Определите удельную теплоёмкость парафина, если через 1 мин после включения нагревателя температура в сосуде оказалась равна 25 ℃, а ещё через 0,5 мин — 35 ℃. Удельная теплоёмкость воды равна 4200 Дж/(кг · ℃). Мощность нагревателя во время эксперимента остаётся постоянной. Парафин с водой не реагирует и в рассматриваемом диапазоне температур является кристаллическим телом.

Ответ: 2800 Дж/(кг · ℃).

Решение: Пусть t_0 — начальная температура содержимого сосуда, установившаяся в результате теплового равновесия между водой и парафином. За 1 мин содержимое нагрелось на $25\,℃ - t_0$, а за 1,5 мин — на $35\,℃ - t_0$. Так как мощность нагревателя постоянна, получаем

$$\frac{35\,℃ - t_0}{25\,℃ - t_0} = 1{,}5 \quad \Rightarrow \quad t_0 = 5\,℃.$$

Рассмотрим теперь процесс установления теплового равновесия в сосуде. Запишем уравнение теплового баланса

$$c_п m_п(20\,℃ - 5\,℃) = c_в m_в(5\,℃ - 0\,℃).$$

Выражая отсюда теплоёмкость парафина $c_п$, получам

$$c_п = \frac{c_в m_в \cdot 5\,℃}{m_п \cdot 15\,℃} = \frac{4200\ \text{Дж/(кг} \cdot ℃) \cdot 1\ \text{кг} \cdot 5\,℃}{0{,}5\ \text{кг} \cdot 15\,℃} = 2800\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ℃}.$$

Критерии:

Записана связь между временем нагрева и изменением температуры содержимого . . 2 балла
Найдено t_0 . . . . 3 балла
Записано уравнение теплового баланса . . . . 3 балла
Найдена теплоёмкость парафина . . . . 2 балла

Задача 8.4. Раз ступенька, два ступенька…

Два мальчика — Паша и Дима — поднимаются по движущемуся вверх эскалатору метро и считают ступени. Паша насчитал 50 ступеней, а Дима, двигавшийся относительно эскалатора в 1,5 раза медленнее, насчитал только 40. Сколько ступеней насчитали бы мальчики, идя по неподвижному эскалатору?

Ответ: 100 ступеней.

Решение: Пусть u — скорость эскалатора, L — его длина, $1{,}5v$ — скорость Паши относительно эскалатора, а v — скорость Димы. По условию, Паша насчитал 50 ступенек, следовательно он прошёл по эскалатору расстояние $50x$, где x — расстояние, соответствующее одной ступеньке. За то же время относительно земли Паша перемещается на расстояние L. Это значит, что

$$\frac{50x}{1{,}5v} = \frac{L}{u + 1{,}5v}. \qquad (1)$$

В случае Димы:

$$\frac{40x}{v} = \frac{L}{u + v}. \qquad (2)$$

Из записанных равенств получаем

$$\frac{50x}{1{,}5v} \cdot \frac{v}{40x} = \frac{L}{u + 1{,}5v} \cdot \frac{u + v}{L} \quad \Rightarrow \quad \frac{50}{60} = \frac{u + v}{u + 1{,}5v} \quad \Rightarrow \quad u = 1{,}5v.$$

Подставляем теперь найденную скорость эскалатора в любое из записанных выше соотношений (например, в (1)):

$$\frac{50x}{1{,}5v} = \frac{L}{1{,}5v + 1{,}5v} \quad \Rightarrow \quad L = 100x.$$

Таким образом, идя по неподвижному эскалатору, мальчики пройдут расстояние $L = 100x$, то есть насчитают 100 ступеней.

Критерии:

Количество ступеней связано с пройденным по эскалатору расстоянием . . . . 2 балла
Записано соотношение (1) . . . . 2 балла
Записано соотношение (2) . . . . 2 балла
Найдена скорость эскалатора . . . . 2 балла
Найдено количество ступеней, отсчитанное на стоящем эскалаторе . . . . 2 балла

Максимально возможный балл в 8 классе 40

9 класс

Задача 9.1. Вася балуется.

Школьник Вася, возвращаясь после школы домой, решил побросать с моста в реку камни. Первый камень, брошенный Васей, достиг поверхности воды ровно через 1,5 с. Второй камень, брошенный с начальной скоростью, вдвое большей, чем у первого, долетел до поверхности воды через 1,2 с. Какова высота места, с которого производятся броски? Вася бросает камни вертикально вниз. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: 18 м.

Решение: Пусть v — начальная скорость камня в первом случае. Тогда

$$h = vt_1 + \frac{gt_1^2}{2},$$

где $t_1 = 1{,}5$ с — время полёта камня, а h — искомая высота. Во втором случае

$$h = 2vt_2 + \frac{gt_2^2}{2},$$

где $t_2 = 1{,}2$ с. Приравнивая правые части обоих выражений, находим v:

$$vt_1 + \frac{gt_1^2}{2} = 2vt_2 + \frac{gt_2^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{g(t_1^2 - t_2^2)}{2(2t_2 - t_1)} = 4{,}5\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Отсюда находим высоту точки бросания:

$$h = vt_1 + \frac{gt_1^2}{2} = 18 \text{ м}.$$

Критерии:

Записана связь между h, v и t_1 . . . . 2 балла
Записана связь между h, v и t_2 . . . . 2 балла
Найдена v *или* получено уравнение на h, не содержащее v . . . . 4 балла
Найдено значение h . . . . 2 балла

Задача 9.2. Кекс в чае.

Засохший кекс цилиндрической формы высотой $h = 7$ см положили в чай. Плотность сухого кекса равна $\rho_{\text{сух}} = 0{,}3$ г/см^3, плотность намокшего — $\rho_{\text{мокр}} = 0{,}9$ г/см^3. На какую глубину погрузится кекс, если будет плавать вертикально? Плотность чая — $\rho_{\text{чай}} = 1$ г/см^3. Считать, что намокает только та часть кекса, которая погружена в чай.

Ответ: 5,25 см.

Решение: Пусть x — искомая глубина погружения кекса, а S — площадь его поперечного сечения. Тогда объём погруженной части равен $V_{\text{погр}} = Sx$. Найдём массу m кекса, плавающего в чае. Она состоит из масс сухой и намокшей частей. Масса намокшей части кекса равна $m_{\text{мокр}} = \rho_{\text{мокр}}Sx$, масса сухой части — $m_{\text{сух}} = \rho_{\text{сух}}S(h - x)$. Тогда

$$m = m_{\text{сух}} + m_{\text{мокр}} = \rho_{\text{сух}}S(h - x) + \rho_{\text{мокр}}Sx.$$

Запишем условие плавания кекса в чае:

$$mg = \rho_{\text{чай}}gV_{\text{погр}} \quad \Rightarrow \quad \rho_{\text{сух}}S(h - x) + \rho_{\text{мокр}}Sx = \rho_{\text{чай}}Sx.$$

Сокращая S и выражая отсюда x, получаем

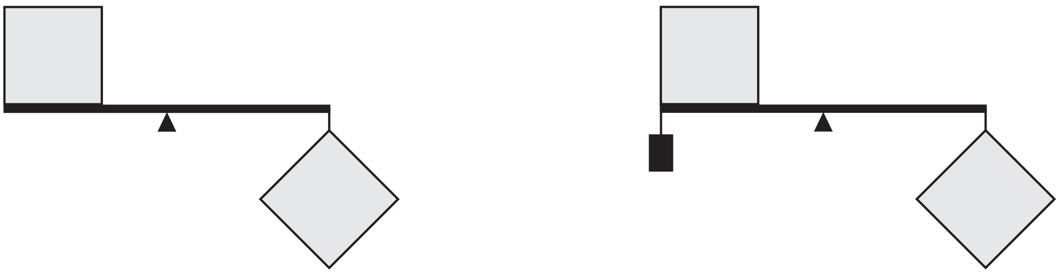
$$x = \frac{\rho_{\text{сух}} h}{\rho_{\text{чай}} - \rho_{\text{мокр}} + \rho_{\text{сух}}} = 5{,}25 \text{ см}.$$

Критерии:

Найдено выражение для массы сухой части кекса . . . . 2 балла
Найдено выражение для массы намокшей части кекса . . . . 2 балла
Записано условие плавания . . . . 4 балла
Найдена глубина погружения кекса . . . . 2 балла

Задача 9.3. Размер имеет значение!

Девятиклассник Петя решил провести эксперимент по проверке правила равновесия рычага. Для этого он взял в школьной лаборатории доску длиной $L = 100$ см и два одинаковых пенопластовых куба массой $m = 810$ г каждый. Первый куб Петя положил на левый край доски, а второй куб подвесил на нити, прикреплённой к правому краю (см. рис. 9.1а). К своему удивлению, Петя обнаружил, что если поставить опору в середине доски, то равновесия не будет! Найти массу груза, который нужно подвесить Пете к левому краю доски (см. рис. 9.1б), чтобы добиться равновесия системы? Доска является однородной по всей длине. Плотность пенопласта равна $\rho = 30$ кг/м^3.



а б

Рис. 9.1.

Ответ: 243 г.

Решение: Объём пенопластового куба равен $a^3 = m/\rho = 27000$ см^3, а его ребро — $a = 30$ см. Пусть масса груза равна M. Запишем правило моментов для рассматриваемой системы (рис. 9.2)

$$Mg\frac{L}{2} + mg\frac{L-a}{2} = mg\frac{L}{2}.$$

Преобразуя его, получаем

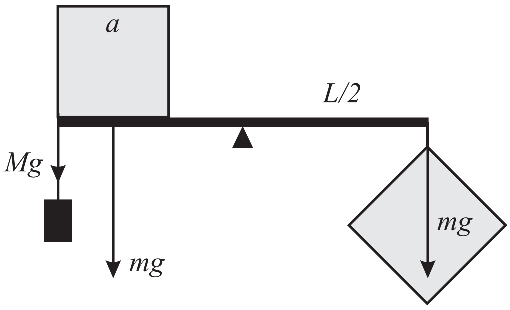


Рис. 9.2.

$$\frac{ML}{2} = \frac{ma}{2} \quad \Rightarrow \quad M = \frac{ma}{L} = \frac{810 \text{ г} \cdot 30 \text{ см}}{100 \text{ см}} = 243 \text{ г}.$$

Критерии:

Найден объём куба . . . . 1 балл
Найдена длина ребра куба . . . . 1 балл
Записано правило моментов . . . . 5 баллов
Найдена масса груза . . . . 3 балла

Задача 9.4. «Жидкий» реостат.

Экспериментатор Иннокентий Иванов сконструировал «жидкий» реостат — прямоугольный сосуд (рис. 9.3а), в который налито некоторое количество проводящей электричество жидкости (например, раствора соли). Две противоположные стенки этого сосуда сделаны из проводящих пластин и могут быть подключены к цепи, а остальные стенки и дно сосуда ток не проводят. Расстояние между проводящими пластинами можно регулировать. Чтобы проверить работу полученного прибора, Иннокентий собрал цепь (рис. 9.3б), состоящую из источника напряжением $U = 1{,}5$ В, идеального амперметра, резистора сопротивлением $R = 2$ Ом и реостата. При первоначальном положении пластин амперметр показывает силу тока $I_1 = 150$ мА. Какую силу тока I_2 он должен показать, если расстояние между пластинами увеличить вдвое?

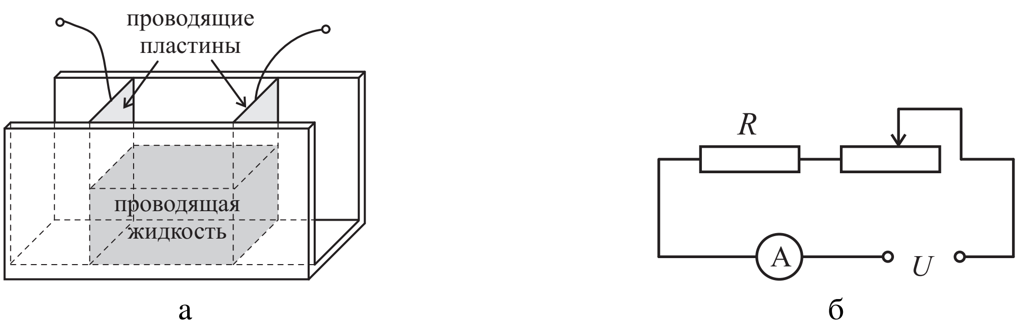


Рис. 9.3.

Ответ: ≈ 44 мА.

Решение: Найдём сопротивление реостата при первоначальном положении пластин

$$R_0 = \frac{U}{I_1} - R = 8 \text{ Ом}.$$

Если пластины реостата раздвинуть в два раза, то длина ёмкости с проводником увеличится вдвое. В то же время, объём жидкости не меняется, поэтому площадь поперечного сечения проводника уменьшится в два раза. В результате, сопротивление реостата увеличится в 4 раза. Отсюда

$$I_2 = \frac{U}{R + 4R_0} \approx 44 \text{ мА}.$$

Критерии:

Найдено сопротивление реостата в первоначальном положении . . . . 2 балла
Найдено изменение площади поперечного сечения проводника . . . . 3 балла
Найдено сопротивление реостата во втором положении . . . . 3 балла
Найдено I_2 . . . . 2 балла

Задача 9.5. Плавление льда.

В своей лаборатории, температура воздуха в которой постоянна, Иннокентий Иванов изучал процесс плавления льда. Он взял тонкостенный металлический сосуд, положил туда 10 г льда

при температуре 0 °C и поставил его на нагреватель мощностью 50 Вт. Оказалось, что лёд полностью превращается в воду за 55 с.
1. За какое время расплавилось бы 10 г льда, если мощность нагревателя увеличить до 100 Вт?
2. За какое время расплавилось бы 10 г льда, если сосуд со льдом просто оставить в лаборатории?
Считать, что количество тепла, поступающего в единицу времени в холодное тело из окружающей среды, пропорционально разности температур между ними. Удельная теплота плавления льда равна 330 кДж/кг.

Ответ: 1) 30 с; 2) 330 с.

Решение: Количество теплоты, необходимое для плавления 10 г льда, равно $Q = 330$ кДж/кг $\cdot$ 0,01 кг $= 3300$ Дж. Мощность, требующаяся для того, чтобы это сделать за 55 с, равна $P_1 = Q/55$ с $= 60$ Вт. Нагреватель даёт 50 Вт, следовательно $P_0 = 10$ Вт поступает из окружающего воздуха. Поскольку температура воздуха и температура плавящегося льда не меняются, мощность, поступающая из окружающего воздуха, остаётся постоянной.
1. Если мощность нагревателя равна $P = 100$ Вт, то мощность, поступающая к плавящемуся льду, составляет $P_2 = P + P_0 = 110$ Вт. Отсюда находим время плавления льда: $t_2 = Q/P_2 = 30$ с.
2. Если нагреватель отсутствует, то лёд плавится только за счёт тепла, поступающего из окружающего воздуха. Время плавления льда в этом случае равно $t_3 = Q/P_0 = 330$ с.

Критерии:

Найдено количество теплоты, требуемое для плавления льда . . . . 1 балл
Найдена мощность, поступающая из воздуха . . . . 3 балла
Найдено время плавления при мощности нагревателя 100 Вт . . . . 3 балла
Найдено время плавления без нагревателя . . . . 3 балла

Максимально возможный балл в 9 классе 50

10 класс

Задача 10.1. Погоня за поездом.

Пассажир вагона №10 во время стоянки поезда прогуливался по перрону. Когда он был у конца последнего вагона №13, поезд начал двигаться с ускорением $a = 0{,}5$ м/с^2. С какой минимальной скоростью v нужно бежать пассажиру, чтобы успеть добежать до своего вагона? Длина одного вагона равна 25 м. Вагоны нумеруются без пропусков. Перрон станции считать достаточно длинным.

Ответ: $\approx 8{,}7$ м/с.

Решение: Пусть t — время, за которое пассажир догонит свой вагон. В предельном случае, в момент времени t скорость пассажира равна скорости поезда: $v = at$. С другой стороны, относительно поезда пассажир должен пробежать расстояние $L = 3 \cdot 25$ м $= 75$ м. Поэтому

$$vt = L + \frac{at^2}{2}.$$

Подставляя сюда $t = v/a$, получаем

$$\frac{v^2}{a} = L + \frac{v^2}{2a} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2La} \approx 8{,}7\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Критерии:

Записано условие равенства скоростей $v = at$ . . . . 3 балла
Записано расстояние, пройденное пассажиром . . . . 1 балл
Записано расстояние, пройденное поездом . . . . 1 балл
Записана связь между пройденными расстояниями . . . . 3 балла
Найдена скорость v . . . . 2 балла

Задача 10.2. Встречные токи.

В цепи, изображённой на рис. 10.1, токи, текущие в соединительных проводах AB и CD, равны по величине и противоположны по направлению. Найдите сопротивление R правого нижнего резистора. Чему равна величина тока I, если напряжение источника постоянно и равно $U = 3{,}2$ В. Сопротивления остальных резисторов даны на рисунке, сопротивлением соединительных проводов пренебречь.

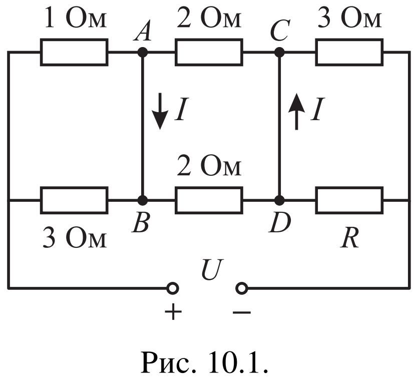


Рис. 10.1.

Ответ: 9 Ом; 0,2 А.

Решение: Пусть I_0 — ток, текущий через левый нижний резистор сопротивлением 3 Ом (см. рис. 10.2). Так как резистор 1 Ом соединён с ним параллельно, то ток через него равен $3I_0$, а ток, текущий через источник, равен $4I_0$. Резисторы в центральной части схемы имеют одинаковое сопротивление и соединены параллельно, поэтому токи через них равны по $2I_0$. Отсюда получаем, что ток, ответвляющийся в левую вертикальную перемычку равен $I = I_0$.
Ток в правой перемычке, по условию, тоже равен $I = I_0$, поэтому токи через правый верхний

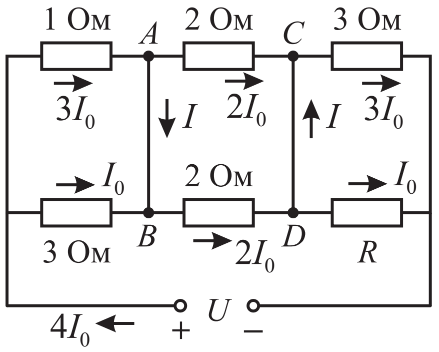


Рис. 10.2.

и правый нижний резисторы равны, соответственно, $3I_0$ и I_0. Приравнивая напряжения на них, получаем

$$3I_0 \cdot 3\text{ Ом} = I_0 R \quad \Rightarrow \quad R = 9\text{ Ом}.$$

Вычислим теперь общее сопротивление цепи

$$R_{\text{общ}} = \frac{3\text{ Ом} \cdot 1\text{ Ом}}{3\text{ Ом} + 1\text{ Ом}} + \frac{2\text{ Ом} \cdot 2\text{ Ом}}{2\text{ Ом} + 2\text{ Ом}} + \frac{3\text{ Ом} \cdot 9\text{ Ом}}{3\text{ Ом} + 9\text{ Ом}} = 4\text{ Ом}.$$

Отсюда находим, что

$$4I_0 = \frac{U}{R_{\text{общ}}} = 0{,}8\text{ А} \quad \Rightarrow \quad I = I_0 = 0{,}2\text{ А}.$$

Критерии:

Выражены токи через все резисторы через I . . . . 2 балла
Выражен ток через источник через I . . . . 1 балл
Найдено сопротивление R . . . . 2 балла
Найдено общее сопротивление . . . . 1 балл
Найден ток через источник . . . . 2 балла
Найден ток I . . . . 2 балла

Задача 10.3. Исследуем свойства унобтания.

Экспериментатор Иннокентий Иванов решил исследовать тепловые свойства полученного им нового вещества, которое он назвал унобтанием. Для этого он взял теплоизолированный сосуд со встроенным внутрь нагревателем, налил туда 1 кг воды при температуре 0 °C и положил 200 г исследуемого вещества при температуре 20 °C (при этой температуре унобтаний — кристаллическое тело). Дождавшись установления теплового равновесия, Иннокентий включил нагреватель и начал измерять температуру содержимого. График зависимости температуры от времени представлен на рис. 10.3. Используя его, определите удельную теплоёмкость унобтания в твёрдом состоянии и его удельную теплоту плавления. Удельная теплоёмкость воды равна 4200 Дж/(кг · °C). Мощность нагревателя во время эксперимента остаётся постоянной. Унобтаний с водой не реагирует.

Ответ: 7000 Дж/(кг · °C); 1,3 МДж/кг.

Решение: Из графика следует, что после установления теплового равновесия температура содержимого сосуда равна 5 °C. Пусть $c_у$ — удельная теплоёмкость унобтания, а $\lambda_у$ — его удельная теплота плавления. Запишем уравнение теплового баланса

$$c_у \cdot 0{,}2\text{ кг} \cdot (20\,^\circ\text{C} - 5\,^\circ\text{C}) = c_в \cdot 1\text{ кг} \cdot (5\,^\circ\text{C} - 0\,^\circ\text{C}) \quad \Rightarrow \quad c_у = \frac{5c_в}{3} = 7000\,\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot {}^\circ\text{C}}.$$

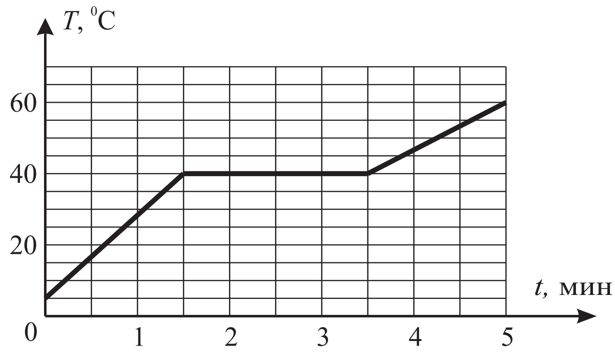


Рис. 10.3.

За первые 1,5 мин содержимое сосуда нагревается на 35 °C:

$$N \cdot 1{,}5 \text{ мин} = (c_у \cdot 0{,}2 \text{ кг} + c_в \cdot 1 \text{ кг}) \cdot 35\,^\circ\text{C} = 196 \text{ кДж},$$

где N — мощность нагревателя. За следующие 2 мин унобтаний плавится и температура в сосуде не меняется:

$$N \cdot 2 \text{ мин} = \lambda_у \cdot 0{,}2 \text{ кг}.$$

Отсюда получаем, что

$$\lambda_у = \frac{196 \text{ кДж} \cdot 2 \text{ мин}}{0{,}2 \text{ кг} \cdot 1{,}5 \text{ мин}} \approx 1{,}3 \; \frac{\text{МДж}}{\text{кг}}.$$

Критерии:

Записано уравнение теплового баланса . . . . 2 балла
Найдена удельная теплоёмкость унобтания . . . . 2 балла
Записано условие теплового баланса на первом наклонном участке графика . . . . . 2 балла
Записано условие теплового баланса на горизонтальном участке графика . . . . 2 балла
Найдена удельная теплота плавления унобтания . . . . 2 балла

Задача 10.4. Изменяем радиус тени.

Точечный источник света S освещает тонкий диск радиуса r. В результате, на экране Э, расположенном за диском, образуется круглая тень. Насколько изменится радиус тени, если между диском и экраном поставить стеклянную пластину толщиной $d = 10$ см (рис. 10.4)? Показатель преломления стекла равен $n = 1{,}5$. Пластина и диск расположены параллельно экрану. Источник света находится на расстоянии r от диска на его оси симметрии.

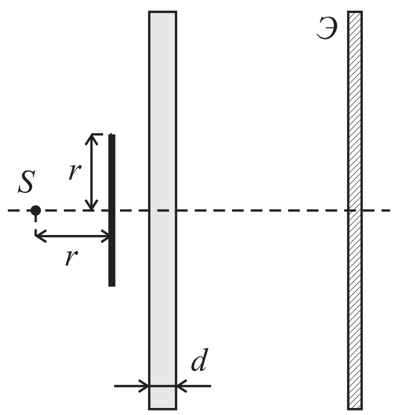


Рис. 10.4.

Ответ: 4,65 см.

Решение: Рассмотрим луч, идущий через край диска. Так как радиус диска и расстояние от источника света до диска равны, этот луч падает на поверхность стеклянной пластины под углом 45° (см. рис. 10.5). После двукратного преломления луч выходит из пластины под тем же углом 45°, но со сдвигом x по горизонтали. Из геометрических построений находим

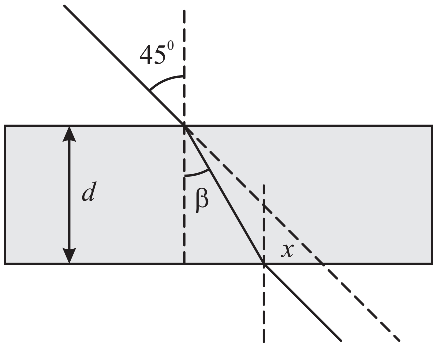


Рис. 10.5.

$$x = d(\operatorname{tg} 45^\circ - \operatorname{tg}\beta),$$

где β — угол преломления. По закону преломления

$$\frac{\sin 45^\circ}{\sin\beta} = n \quad \Rightarrow \quad \sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

После тригонометрических преобразований находим тангенс β и подставляем в формулу для x:

$$\operatorname{tg}\beta = \sqrt{\frac{2}{7}} \quad \Rightarrow \quad x = d\left(1 - \sqrt{\frac{2}{7}}\right) \approx 4{,}65 \text{ см}.$$

Критерии:

Найден угол падения луча, проходящего через край диска . . . . 1 балл
Записан закон преломления . . . . 3 балла
Записана формула для смещения луча . . . . 3 балла
Найдено значение смещения . . . . 3 балла

Задача 10.5. Экзамен в автошколе.

Девушка Маша сдаёт упражнение «эстакада». Она на своём полноприводном автомобиле должна въехать на эстакаду — горку, образующую угол $\alpha = 30^\circ$ с горизонтом. С каким максимальным ускорением автомобиль Маши сможет подниматься вверх, если коэффициент трения шин о покрытие горки равен $\mu = 0{,}6$. В начальный момент машина находится на склоне. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2.

Ответ: $\approx 0{,}2$ м/с^2.

Решение: Автомобиль движется вверх по склону благодаря силе трения $F_{\text{тр}}$ между колёсами и поверхностью. Ускорение машины будет максимальным, когда сила трения максимальна, то есть, если $F_{\text{тр}} = \mu N$, где N — сила реакции опоры. Изобразим силы, действующие на автомобиль (см. рис. 10.6; для простоты изображения, все векторы выходят из одной точки), и запишем 2-й закон Ньютона в проекциях на две взаимно перпендикулярные оси (здесь m — масса машины):

$$Ox: \; ma = \mu N - mg\sin\alpha, \qquad Oy: \; 0 = N - mg\cos\alpha.$$

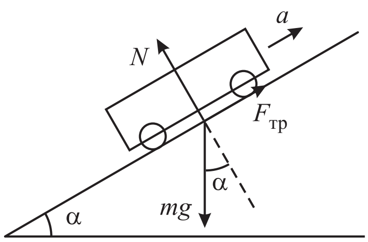


Рис. 10.6.

Выражая из второго уравнения N и подставляя в первое, получаем

$$ma = \mu mg \cos\alpha - mg \sin\alpha \quad \Rightarrow \quad a = g(\mu\cos\alpha - \sin\alpha) \approx 0{,}2\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Критерии:

Указано направление силы трения между колёсами и поверхностью . . . . 2 балла
Указано, что ускорение максимально, когда сила трения максимальна . . . . 2 балла
Записан 2-й закон Ньютона . . . . 3 балла
Найдено ускорение автомобиля . . . . 3 балла

Максимально возможный балл в 10 классе 50

11 класс

Задача 11.1. Разъезд автомобилей.

Два автомобиля движутся равномерно по взаимно перпендикулярным шоссе. Скорость первого автомобиля равна v, а скорость второго — $2v$. Найдите наименьшее расстояние между автомобилями, если в некоторый момент времени первый автомобиль находился на расстоянии L от перекрёстка, а второй — на расстоянии $3L$ (см. рис. 11.1).

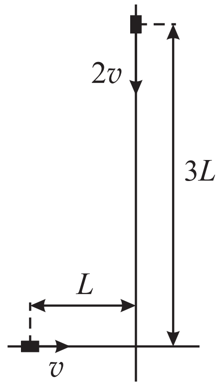


Рис. 11.1.

Ответ: $L/\sqrt{5}$.

Решение: *Способ 1.* Запишем уравнения движения для обоих автомобилей:

$$s_1(t) = L - vt, \qquad s_2(t) = 3L - 2vt.$$

По теореме Пифагора расстояние между автомобилями в момент времени t задаётся формулой

$$s^2 = s_1^2 + s_2^2 = (L - vt)^2 + (3L - 2vt)^2 = 5v^2t^2 - 14Lvt + 10L^2.$$

Чтобы найти минимальное значение этого выражения, вычислим производную и приравняем её нулю:

$$(5v^2t^2 - 14Lvt + 10L^2)' = 10v^2t - 14Lv = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{\text{мин}} = \frac{7L}{5v}.$$

Подставляя найденное время в выражение для квадрата расстояния, получаем

$$s_{\text{мин}}^2 = 5v^2t_{\text{мин}}^2 - 14Lvt_{\text{мин}} + 10L^2 = \frac{L^2}{5} \quad \Rightarrow \quad s_{\text{мин}} = \frac{L}{\sqrt{5}}.$$

Критерии:

Записано уравнение движения первого автомобиля . . . . 1 балл
Записано уравнение движения второго автомобиля . . . . 1 балл
Записано выражение для расстояния между ними . . . . 3 балла
Найден момент времени наибольшего сближения . . . . 3 балла
Найдено минимальное расстояние . . . . 2 балла

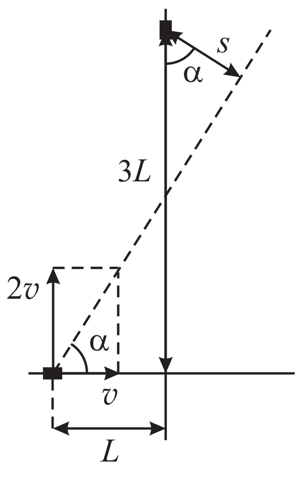


Рис. 11.2.

Способ 2. Перейдём в систему отсчёта одного из автомобилей, например, автомобиля, находящегося на расстоянии $3L$ от перекрёстка. В этом случае другой автомобиль будет двигаться вдоль прямой, изображённой на рис 11.2. Минимальное расстояние между автомобилями — расстояние s от покоящегося автомобиля до данной прямой. Из рисунка следует, что

$$\frac{s}{\cos\alpha} + L\operatorname{tg}\alpha = 3L.$$

Так как $\operatorname{tg}\alpha = 2$, то $\cos\alpha = 1/\sqrt{5}$. Исходя из этого, получаем

$$s = L\cos\alpha = \frac{L}{\sqrt{5}}.$$

Критерии:

Совершён переход в систему отсчёта одного из автомобилей . . . . 2 балла
Изображена траектория движения другого автомобиля . . . . 2 балла
Найдены углы (или тригонометрические функции углов) . . . . 2 балла
Указано, что является минимальным расстоянием . . . . 2 балла
Найдено минимальное расстояние . . . . 2 балла

Задача 11.2. Натяжение нити.

Систему из двух грузов массы $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 1{,}5$ кг, связанных нитью, тянут с противоположные стороны с силами $F_1 = 10$ Н и $F_2 = 20$ Н (см. рис. 11.3). Найдите силу натяжения нити T, если коэффициент трения обоих грузов о поверхность равен $\mu = 0{,}3$. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2.

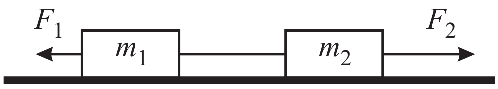


Рис. 11.3.

Ответ: 14 Н.

Решение: Пусть a — ускорение системы. Максимальное значение силы трения равно $\mu(m_1+m_2)g = 7{,}5$ Н, равнодействующая сил F_1 и F_2 равна $F_2-F_1 = 10$ Н. Так как $F_2-F_1 > \mu(m_1+ + m_2)g$, система грузов не находится в покое, т. е. $a \neq 0$. Ускорение грузов равно

$$a = \frac{F_2 - F_1 - \mu(m_1+m_2)g}{m_1+m_2} = 1 \text{ м/с}^2.$$

Рассмотрим теперь силы, приложенные к одному из грузов, например, к первому. По 2-ому закону Ньютона

$$m_1 a = T - F_1 - \mu m_1 g \quad\Rightarrow\quad T = F_1 + m_1(\mu g + a) = 14 \text{ Н}.$$

Критерии:

Показано, что система движется . . . . 2 балла
Найдено ускорение системы . . . . 3 балла
Записан 2-й закон Ньютона для одного или обоих грузов . . . . 3 балла
Найдена величина силы T . . . . 2 балла

Задача 11.3. Поршень в сосуде.

Прямоугольный сосуд длиной 2 м и высотой 1 м с непроницаемыми стенками разделён на две равные части тонким вертикальным подвижным поршнем (рис. 11.4). Левая часть сосуда доверху заполнена ртутью. В правой части находится воздух при температуре $T_0 = 167\,^\circ$C и давлении $p_0 = 550$ мм рт. ст. Воздух в сосуде начинают медленно охлаждать.

1. При какой температуре воздуха T_1 поршень **начнёт** смещаться?
2. При какой температуре воздуха T_2 поршень сместится на 25 см?

Поршень тепло не проводит. Тепловым расширением стенок сосуда и трением пренебречь.

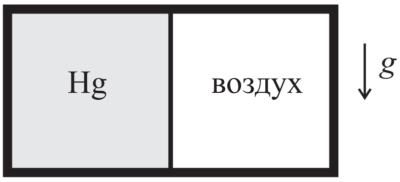


Рис. 11.4.

Ответ: $T_1 = 400$ К; $T_2 = 192$ К.

Решение: Так как газ в правой части сосуда охлаждают медленно, можно считать, что поршень всё время находится в равновесии. Равновесие поршня подразумевает, что **сила давления** $F_л$, действующая на него слева, равна силе давления справа $F_п$. Сила давления справа равна $F_п = pS$, где p — давление газа, S — площадь поршня.
1. Давление ртути линейно зависит от глубины. В случае, когда поршень только начал двигаться, давление меняется от нуля до 1000 мм. рт. ст. Сила давления ртути на поршень может быть найдена как

$$F_л = \frac{0 + 1000 \text{ мм. рт. ст.}}{2} S.$$

Из условия $F_п = F_л$ следует, что поршень начнёт смещаться, когда давление воздуха уменьшится до $p_1 = 500$ мм. рт. ст. при неизменном объёме. Температура, при которой это произойдёт, равна

$$T_1 = \frac{p_1}{p_0} T_0 = 400 \text{ К}.$$

2. Если поршень сместится на 25 см, длина левой части сосуда станет равна 1,25 м, а длина правой — 0,75 м. В результате объём воздуха уменьшится до $3V_0/4$ (V_0 — начальный объём воздуха). Высота слоя ртути также уменьшится до 0,8 м, поэтому давление ртути меняется от нуля до 800 мм. рт. ст. Найдём силу давления $F_л$:

$$F_л = \frac{0 + 800 \text{ мм. рт. ст.}}{2} \cdot 0{,}8S,$$

где множитель 0,8 появляется из-за того, что площадь контакта слоя ртути и поршня уменьшается пропорционально высоте этого слоя. Из условия $F_п = F_л$ следует, что давление воздуха в этом случае равно

$$p_2 = \frac{F_л}{S} = 320 \text{ мм. рт. ст.}$$

Используя уравнение Менделеева-Клапейрона, находим температуру воздуха в правой части сосуда:

$$\frac{p_1 V_0}{T_1} = \frac{p_2 \cdot 3V_0/4}{T_2} \quad \Rightarrow \quad T_2 = \frac{3p_2 T_1}{4p_1} = 192 \text{ К}.$$

Критерии:

Записана сила давления на поршень в первом случае . . . . 2 балла
Найдено давление воздуха в первом случае . . . . 1 балл
Найдена температура T_1 . . . . 1 балл
Найден объём воздуха во втором случае . . . . 1 балл
Найдена толщина слоя ртути во втором случае . . . . 1 балл
Записана сила давления на поршень во втором случае . . . . 2 балла
Найдено давление воздуха во втором случае . . . . 1 балл
Найдена температура T_2 . . . . 1 балл

Задача 11.4. Опасная кормушка.
Голубь ходит по платформе-кормушке в форме равностороннего треугольника, длина стороны которого $a = 180$ см. Платформа одной стороной прикреплена к стене шарниром, а противоположной вершиной подвешена на нити к гвоздю (на рис. 11.5 изображён вид сбоку). Длина нити равна $L = 1{,}8$ м, масса голубя — $m = 0{,}3$ кг, масса платформы — $M = 1{,}2$ кг. На каком максимальном расстоянии d от стены может безопасно находиться голубь, если гвоздь можно вытащить, приложив силу $F = 10$ Н перпендикулярно стене. Считать, что сила трения между гвоздём и стеной практически не зависит от направления силы, с которой вытаскивают гвоздь из стены. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2.

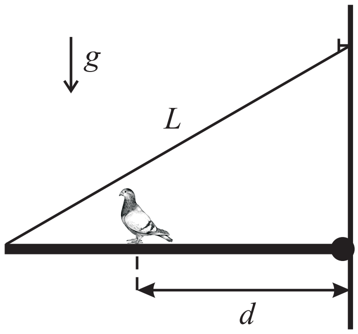


Рис. 11.5.

Ответ: 0,92 м.

Решение: Центр масс кормушки находится в геометрическом центре равностороннего треугольника, то есть на расстоянии $\frac{a}{2\sqrt{3}}$ от его сторон. Так как, по условию, $L = a$, а высота равностороннего треугольника — $a\sqrt{3}/2$, угол между нитью и стеной равен 60°. Пусть T — сила натяжения нити. Запишем правило моментов относительно шарнира (см. рис. 11.6а):

$$T\frac{a\sqrt{3}}{4} = Mg\frac{a}{2\sqrt{3}} + mgd.$$

Гвоздь выйдет из стены, если проекция силы натяжения T на направление, перпендикулярное стене, превзойдёт F (см. рис. 11.6б). В предельном случае

$$F = T\sin 60^\circ = \frac{T\sqrt{3}}{2}.$$

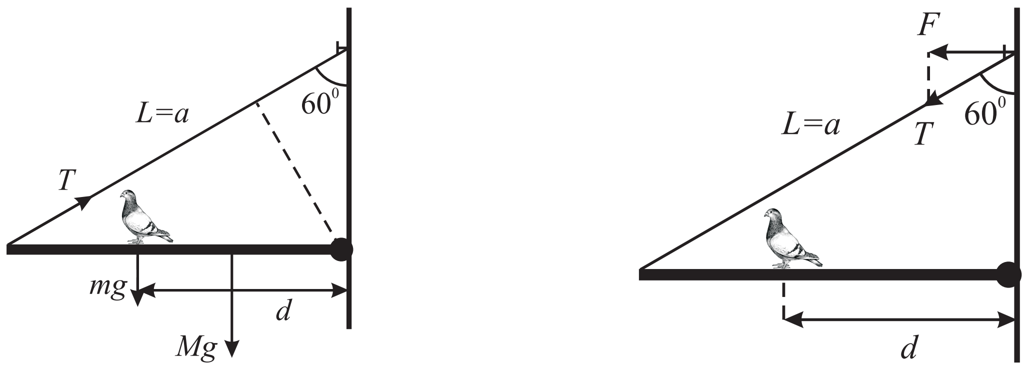


Рис. 11.6.

Подставляя это в предыдущее уравнение, получаем

$$\frac{Fa}{2} = \frac{Mga}{2\sqrt{3}} + mgd \quad \Rightarrow \quad d = \frac{a}{2mg}\left(F - \frac{Mg}{\sqrt{3}}\right) \approx 0{,}92 \text{ м.}$$

Критерии:

Найдено положение центра масс кормушки . . . . 2 балла
Найдена связь между T и F . . . . 2 балла
Записано правило моментов относительно шарнира . . . . 3 балла
Найдено расстояние d . . . . 3 балла

Задача 11.5. Цепь с заземлением.

В цепи, изображённой на рис. 11.7, ЭДС батареи равна $\mathscr{E}$, а ёмкости конденсаторов — C и $2C$. Первоначально ключ находится в положении «1», правый конденсатор разряжен, и токи в цепи не текут. Какими станут заряды обоих конденсаторов, если ключ переключить в положение «2»?

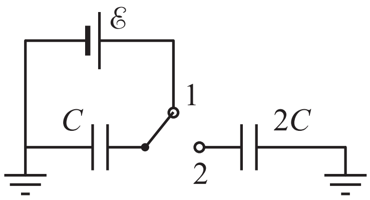


Рис. 11.7.

Ответ: $q_C = C\mathscr{E}/3$, $q_{2C} = 2C\mathscr{E}/3$.

Решение: Когда ключ находится в положении «1», заряд левого конденсатора равен $q = C\mathscr{E}$. При переключении ключа в положение «2» заряд перераспределяется между обоими конденсаторами. Пусть на правой обкладке конденсатора ёмкостью C останется заряд q_C, а на левой обкладке второго конденсатора появится заряд q_{2C}. Тогда $q_C + q_{2C} = q$. Так как оба конца получившейся цепи заземлены, то сумма напряжений (с учётом полярности) на конденсаторах равна нулю. Из этого следует, что

$$\frac{q_C}{C} = \frac{q_{2C}}{2C} \quad \Rightarrow \quad q_{2C} = 2q_C \quad \Rightarrow \quad q_C = \frac{q}{3} = \frac{C\mathscr{E}}{3}, \quad q_{2C} = \frac{2C\mathscr{E}}{3}.$$

Критерии:

Найден заряд левого конденсатора до переключения . . . . 2 балла
Закон сохранения заряда . . . . 3 балла
Показано, что напряжения на конденсаторах равны по модулю . . . . 3 балла
Найдены заряды конденсаторов после переключения . . . . 2 балла

Максимально возможный балл в 11 классе 50