Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике. 2020–21 учебный год

4 класс

Время выполнения заданий — 180 минут   Максимальный балл — 100

В каждой из предложенных вам задач нужно ***написать правильный ответ****. Ответ может быть числовой, а может быть строкой текста. Если в задаче требуется привести пример, достаточно указать один пример.* ***Никаких решений задач писать не нужно! Условия задач можно оставить себе.*** *Пользоваться калькулятором НЕ разрешается. Правильные ответы будут выложены на сайте* `www.kazan-math.info` *после олимпиады.*

Задача 1. К 13:25 у Коли было решено 14 задач по математике. Во сколько Коля начал решать задачи, если на каждую задачу он тратил по 4 минуты? *Ответ запишите в виде ЧЧ:ММ, например: 11:23.*

Задача 2. В лесной лавке хомяк обменял 10 фундуков на 2 яблока. Сколько фундуков нужно принести белочке в лавку, чтобы получить 7 яблок?

Задача 3. Марья Ивановна повела в кино 4А и 4Б классы. Всего пошло 37 школьников. Билет стоил 50 рублей, но каждый 12-й школьник получал билет за полцены, а каждый 35-й школьник проходил бесплатно. Сколько всего денег заплатила Марья Ивановна за школьников?

Задача 4. Даша и Глаша съели по 2 яблока из корзины. Оказалось, что в корзине осталось на 2 яблока больше, чем съели девочки. Сколько было изначально яблок в корзине?

Задача 5. Расставьте в некоторых (можно во всех) промежутках между цифрами: 1 6 1 1 2 0 2 0 знаки арифметических действий («$+$», «$-$», «$\times$», «$\div$») так, чтобы значение получившегося выражения равнялось 48. Можно использовать скобки.

Задача 6. Найдите сумму цифр числа $1 + 11 + 101 + 1001 + 10001 + \ldots + 10\ldots01$. В последнем числе 20 нулей.

Задача 7. Антон, Борис и Витя заняли первые три места на математической олимпиаде. Антон сказал: «Я на втором месте». Борис сказал: «Антон первый». Витя сказал: «Я победитель». Известно, что занявший третье место сказал правду, а про остальных неизвестно, сказали они правду или соврали. Какое место занял Борис? *Ответ запишите в виде числа.*

Задача 8. Трое богатырей отправились к многоглавому дракону. Первый богатырь левой рукой отрубил половину всех голов, а правой — еще две. Второй богатырь тоже левой рукой отрубил половину всех оставшихся голов, а правой — еще две. Затем третий богатырь сделал то же самое с оставшимися головами. После этого дракон упал на землю без голов. Сколько голов было у дракона в начале?

Задача 9. Сколько конфет съедят за 10 минут Аня, Таня и Ваня вместе, если известно, что Аня съедает 12 конфет за 30 минут, Таня съедает 14 конфет за 20 минут, а Ваня съедает 21 конфету за 15 минут?

Задача 10. В магазине продаются 3 типа гирь — красные, зеленые и синие. Все гири одного типа весят одинаково. Известно, что 7 красных гирь весят как 4 синих, а 2 синих — как 3 зеленых. Какой тип гирь самый легкий?

Задача 11. В пустые ячейки квадрата 4×4 нужно вписать числа от 1 до 4 так, чтобы в каждом горизонтальном ряду, в каждой вертикальной колонке и в каждом из четырех выделенных квадратов 2×2 каждое число встречалось ровно по одному разу. Некоторые числа уже расставлены. В ответ нужно записать сумму четырех чисел, стоящих на диагонали, идущей из левого нижнего угла в правый верхний.

3	2		4
			3
2			
1		3	2

Задача 12. Руслан написал в тетради синей ручкой числа от 1 до 20 подряд: 1234567891011121314151617181920. Затем он взял красную ручку, и написал числа от 21 до 45. На сколько красных цифр в тетради написано больше, чем синих?

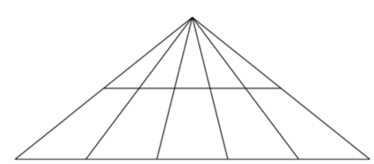
Задача 13. На уроке математики четвероклассники рисовали фигуры. Всего было нарисовано 12 кругов, 12 треугольников и 8 прямоугольников. Оказалось, что был только один ребенок, который нарисовал по одной фигуре каждого типа. Еще семь детей нарисовали по две фигуры — один треугольник и один круг, а каждый из остальных нарисовал ровно по одной фигуре. Сколько учеников в классе?

Задача 14. В корзинке лежит 9 желтых, 1 красное и 7 зеленых яблок. Какое наименьшее количество яблок нужно достать, чтобы среди них обязательно нашлись яблоки всех трех цветов?

Задача 15. Три одинаковых стакана, наполненных до краев водой, весят вместе 864 грамма, а три наполовину полных стакана с водой — 576 граммов. Сколько граммов воды в полном стакане?

Задача 16. Для обустройства детской площадки понадобилось 35 тонн песка. Для перевозки песка были взяты в аренду самосвалы двух типов: с грузоподъемностью 3 тонны по цене 1000 рублей за перевозку и с грузоподъемностью 4 тонны по цене 1100 рублей за перевозку. Каждый самосвал был загружен полностью (3 тонны или 4 тонны, в зависимости от типа самосвала) и отвез песок ровно один раз. Какую минимальную стоимость придется заплатить за перевозку песка? *Ответ укажите в рублях.*

Задача 17. Сколько всего треугольников изображено на рисунке?



Задача 18. Тройняшки (они родились в один день) только что отметили свой третий день рождения. Через пять лет сумма их возрастов будет равна нынешнему возрасту их матери. Сколько лет будет их матери через пять лет?

Задача 19. Каждый мальчик из 4А класса нарисовал по 2 машинки, а каждая девочка — по 5 машинок. Мальчиков вдвое больше, чем девочек. Сколько всего могло быть в классе мальчиков, если общее количество нарисованных машинок от 80 до 90? Необходимо найти все варианты.

Задача 20. На доске был записан верный пример, но хулиган Вася стер две одинаковые цифры в левой части примера, после чего осталась следующая запись: $4 + 5 = 108$. Какую цифру стер Вася? Укажите все варианты ответов.

Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике. 2020–21 учебный год

5 класс

Время выполнения заданий — 180 минут   Максимальный балл — 100

В каждой из предложенных вам задач нужно ***написать правильный ответ****. Ответ может быть числовой, а может быть строкой текста. Если в задаче требуется привести пример, достаточно указать один пример.* ***Никаких решений задач писать не нужно! Условия задач можно оставить себе.*** *Пользоваться калькулятором НЕ разрешается. Правильные ответы будут выложены на сайте* `www.kazan-math.info` *после олимпиады.*

Задача 1. Расставьте в некоторых (можно во всех) промежутках между цифрами: 1 6 1 1 2 0 2 0 знаки арифметических действий («$+$», «$-$», «$\times$», «$\div$») так, чтобы значение получившегося выражения равнялось 68. Можно использовать скобки.

Задача 2. Яна сложила три последовательных числа и получила сумму 39. Артем тоже нашел сумму трех последовательных чисел, но у него получилось 45. На сколько отличается наибольшее число Артема от наибольшего числа Яны?

Задача 3. Катя хочет подарить своим подружкам подарки. Если она купит каждой своей подруге по заколке за 28 рублей, то у нее останется 29 рублей. А если же купит каждой по браслету за 42 рубля, то ей не хватит 13 рублей.

а) Сколько у Кати подруг?

б) Сколько у Кати денег на подарки?

Ответ оформить в виде «а) 100, б) 200».

Задача 4. Три каштана весят 50 граммов. Сколько каштанов на весах, если они показывают 3 кг?

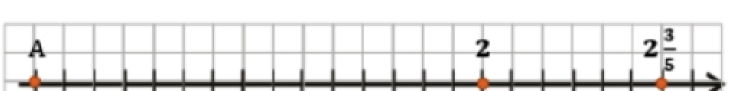
Задача 5. Марья Ивановна пошла в кино с 5А, 5Б и 5В классами. Всего пошло 84 школьника. Билет стоил 50 рублей, но каждый 12-й школьник получал билет за полцены, а каждый 35-й школьник проходил бесплатно. Сколько всего денег заплатила Марья Ивановна за школьников?

Задача 6. В пустые ячейки квадрата 4×4 нужно вписать числа от 1 до 4 так, чтобы в каждом горизонтальном ряду, в каждой вертикальной колонке и в каждом из четырех выделенных квадратов 2×2 каждое число встречалось ровно по одному разу. Некоторые числа уже расставлены. В ответ нужно записать сумму четырех чисел, стоящих на диагонали, идущей из левого нижнего угла в правый верхний.

	3	2	
1			4
2			3
	1	4	

Задача 7. В корзинке лежат 9 желтых, 2 красных и 7 зеленых яблок. Какое наименьшее количество яблок нужно достать из корзинки, чтобы среди них обязательно нашлись яблоки всех трех цветов?

Задача 8. На числовой прямой обозначены точки. Какая координата у точки A?



Задача 9. Ваня записал на доске все натуральные числа от 1 до 100 включительно. Сколько четных цифр ему пришлось написать? (Цифра 0 — четная.)

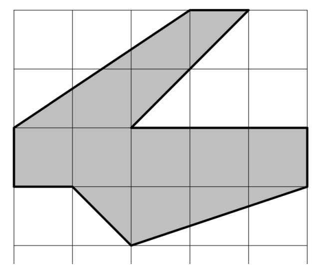
Задача 10. В очереди в школьную столовую стоят пять мальчиков — Кирилл, Амир, Рома, Егор и Матвей. Кирилл стоит впереди Амира, но позади Матвея. Рома и Матвей не стоят рядом, а Егор не стоит рядом ни с Матвеем, ни с Кириллом, ни с Ромой. Кто из мальчиков стоит в середине очереди?

Задача 11. Тройняшки (они родились в один день) только что отметили свой третий день рождения. Через пять лет сумма их возрастов будет равна нынешнему возрасту их матери. Сколько лет будет их матери через пять лет?

Задача 12. Найдите наименьшее положительное целое число, которое заканчивается числом 17, делится на 17, а сумма его цифр тоже равна 17.

Задача 13. Пять детей нарисовали вместе 55 картин, но никто не нарисовал больше 13 картин. Какое наименьшее количество картин мог нарисовать один ребенок?

Задача 14. Найдите площадь закрашенной части, если площадь одного квадратика равна 1 см^2. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

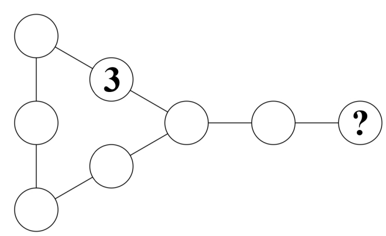


Задача 15. Трое богатырей отправились к многоглавому дракону. Первый богатырь левой рукой отрубил половину всех голов, а правой — еще две. Второй богатырь тоже левой рукой отрубил половину всех оставшихся голов, а правой — еще две. Затем третий богатырь сделал то же самое с оставшимися головами. После этого дракон упал на землю без голов. Сколько голов было у дракона в начале?

Задача 16. За мороженым в очереди стоят 29 детей. Катя стоит между Айдаром и Мишей (стоят именно подряд, между ними никого нет). Позади Айдара стоит вдвое больше детей, чем перед Мишей. Кто из мальчиков стоит перед Катей?

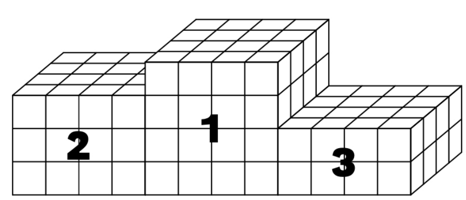
Задача 17. Назовем число «особенным», если сумма его цифр равна 11 и в записи числа нет цифры 0. Найдите разницу между наибольшим и наименьшим «особенными» числами.

Задача 18. Петя расставил в свободные кружочки на рисунке числа 2, 4, 6, 8, 12, 14 и 21 (каждое — по одному разу) так, чтобы произведение трех чисел на каждой из четырех прямых линий было одно и то же. Какое число могло оказаться на месте знака вопроса? Укажите все варианты.



Задача 19. Теперь учительница Марья Ивановна пошла с 5А классом в зоопарк. Она купила билеты своим ученикам и себе. Билет для взрослого был дороже, чем для школьника, но меньше, чем в два раза. Марья Ивановна заплатила 994 рубля. У Игоря Петровича в 5В было на троих учеников больше, чем у Марьи Ивановны, поэтому он заплатил 1120 рублей за своих учеников и себя. Сколько учеников было с Игорем Петровичем?

Задача 20. Для школьной олимпиады ученики 5Б построили подиум из деревянных кубиков (см. рисунок). Сколько всего кубиков они использовали? Дырок внутри подиума нет.



Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике.   2020-21 учебный год

6 класс

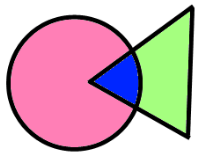
Время выполнения заданий — 180 минут **Максимальный балл – 100**

*В каждой из предложенных вам задач нужно **написать правильный ответ**. Ответ может быть числовой, а может быть строкой текста. Если в задаче требуется привести пример, достаточно указать один пример. **Никаких решений задач писать не нужно! Условия задач можно оставить себе.** Правильные ответы будут выложены на сайте www.kazan-math.info после олимпиады.*

Задача 1. Расставьте в ряд числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 так, чтобы сумма первых пяти чисел равнялась 18, а сумма последних пяти чисел равнялась 27.

Задача 2. На футбольный матч пришло некоторое количество зрителей. На следующий матч через неделю по рекомендации Роспотребнадзора было продано вдвое меньше билетов. А еще через неделю на третий матч было продано вдвое меньше билетов, чем на второй. Всего за три матча на стадионе было 14000 зрителей. Сколько зрителей было на втором матче?

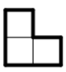
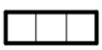
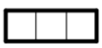
Задача 3. Айрат нарисовал окружность и треугольник. Получилась фигура, состоящая из трех частей (см. рисунок). Потом он нарисовал на другом листе окружность и прямоугольник. Какое наибольшее количество частей может оказаться во второй фигуре?

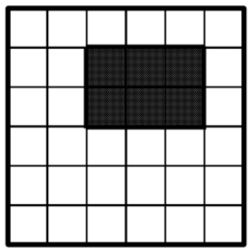


Задача 4. Среднее арифметическое чисел 3, 5, 7, x и y равно 15. Чему равно среднее арифметическое чисел x и y?

Задача 5. Грани куба покрашены в 6 цветов — А, Б, В, Г, Д и Е. На картинке показаны изображения куба с трех разных точек. Грань какого цвета находится напротив грани Д?

Задача 6. В бочке находится 30 литров смеси, содержащей 25% красных чернил, 30% желтых чернил и 45% воды. В бочку долили 5 литров желтых чернил. Какой процент от общего объема теперь занимают желтые чернила?

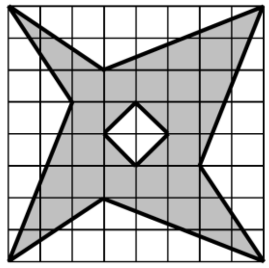
Задача 7. Фигуру с дыркой на картинке разрезали по клеточкам на фигурки вида  и  (необязательно оба вида фигурок должны присутствовать). Какое а) наибольшее; б) наименьшее количество фигурок вида  могло оказаться? *Ответ оформить в виде «а) 100, б) 200».*



Задача 8. Вычислить (1,356+1,2·1,37):(2,724+1,17·2,8).

Задача 9. Расставьте в некоторых (можно во всех) промежутках между цифрами: 1 6 1 1 2 0 2 0 знаки арифметических действий («+», «–», «×», «÷») так, чтобы значение получившегося выражения равнялось 67. Можно использовать скобки.

Задача 10. Придумайте какое-нибудь трехзначное число, в записи которого нет нулей, такое, что если к нему прибавить произведение всех его цифр, то получится число с таким же произведением цифр.



Задача 11. Найдите площадь закрашенной фигуры (см. рисунок). Площадь одной клетки равна 1.

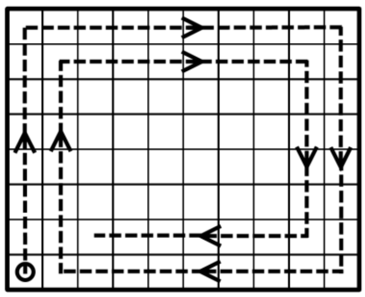
Задача 12. Натуральные числа a и b таковы, что $20a+19b=365$. Чему может равняться число $20b+19a$? Укажите все возможные ответы.

Задача 13. Чему равно значение выражения $1+2–3+4+5–6+7+8–9+…+58+59–60$ (после каждых двух операций сложения идет одно вычитание)?

Задача 14. В пустые ячейки квадрата 4×4 нужно вписать числа от 1 до 4 так, чтобы в каждом горизонтальном ряду, в каждой вертикальной колонке и в каждом из четырех выделенных квадратов 2×2 каждое число встречалось ровно по одному разу. Некоторые числа уже расставлены. В ответ нужно записать сумму четырех чисел, стоящих на диагонали, идущей из левого нижнего угла в правый верхний.

Задача 15. Сколько целых чисел от 1 до 999 содержат в своей записи ровно одну цифру 0?

Задача 16. Четыре человека, каждый из которых либо рыцарь (говорит только правду), либо лжец (всегда лжет), высказали следующие утверждения. Первый: «Среди второго и третьего ровно один рыцарь». Второй: «Среди третьего и четвертого ровно один рыцарь». Третий: «Среди четвертого и первого ровно один рыцарь». Четвертый: «Первый и второй — оба рыцари». Известно, что не все четверо — лжецы. Кто из них рыцари? Укажите всех.



Задача 17. Жук ползает по клеткам прямоугольника размером 40×60 (40 строк и 60 столбцов). Он начинает в левом нижнем углу, ползет вверх до упора, потом поворачивает направо, ползет вправо до упора, и так далее. При этом, когда он доходит до клетки, в которой уже побывал, он не идет в нее, а поворачивает направо. На рисунке изображено начала его маршрута. Когда ему некуда будет ползти, жук останавливается. В какой клетке он остановится? В ответе напишите а) номер ее строки, считая **снизу вверх**; б) номер ее столбца, считая **слева направо**. *Ответ оформить в виде «а) 100, б) 200».*

Задача 18. Сколько существует шестизначных чисел, которые начинаются на 20, заканчиваются на 20 и делятся на 18?

Задача 19. Старший садовник стрижет один куст за 50 минут, первый помощник — за 1 час 15 минут, а второй помощник — за 1 час 20 минут. Сколько кустов они подстригут, работая вместе 4 часа? Они могут помогать друг другу и стричь куст вместе.

Задача 20. Из пункта A в пункт В выехал велосипедист. Одновременно с ним из пункта B в пункт A вышел пешеход, скорость которого в 5 раз меньше скорости велосипедиста. Когда они встретились, велосипедист продолжил путь в пункт B, а пешеход развернулся и тоже пошел обратно в пункт B. Велосипедист же, доехав до пункта B, сразу же развернулся и поехал обратно в пункт A. В результате велосипедист вернулся в пункт A через 10 минут после того, как пешеход вернулся в пункт B. Сколько времени занял бы у пешехода путь из B в A? Скорости пешехода и велосипедиста постоянны.

Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике. 2020-21 учебный год

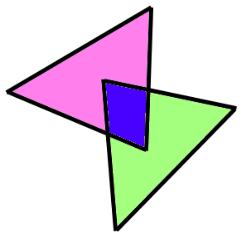
7 класс

Время выполнения заданий — 240 минут ***Максимальный балл – 100***

В каждой из предложенных вам задач нужно ***написать правильный ответ****. Ответ может быть числовой, а может быть строкой текста. Если в задаче требуется привести пример, достаточно указать один пример.* ***Никаких решений задач писать не нужно! Условия задач можно оставить себе.*** *Правильные ответы будут выложены на сайте www.kazan-math.info после олимпиады.*

Задача 1. Расставьте в ряд числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 так, чтобы сумма первых пяти чисел равнялась 25, сумма последних пяти чисел равнялась 25 и сумма пяти чисел в середине (от третьего до седьмого), тоже равнялась 25.

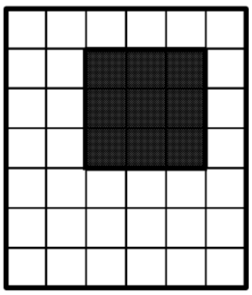
Задача 2. На футбольный матч пришло некоторое количество зрителей. На следующий матч через неделю по рекомендации Роспотребнадзора было продано вдвое меньше билетов. А еще через неделю на третий матч было продано еще втрое меньше билетов, чем на второй. Всего за три матча на стадионе было 15000 зрителей. Сколько зрителей было на втором матче?

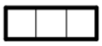
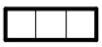


Задача 3. Айрат нарисовал два треугольника. Получилась фигура, состоящая из трех частей (см. рисунок). Потом он нарисовал на другом листе два прямоугольника. Какое наибольшее количество частей может оказаться во второй фигуре?

Задача 4. Среднее арифметическое чисел 10, 11, x, y и z равно 24. Чему равно среднее арифметическое чисел x, y и z?

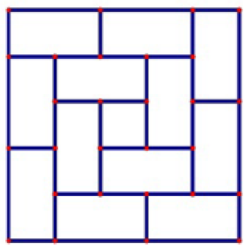
Задача 5. Одна скамейка в школьном спортзале может вместить ровно 11 первоклассников или ровно 7 десятиклассников. Когда N скамеек поставили в ряд, на них смогло разместиться поровну первоклассников и десятиклассников. Чему равно наименьшее возможное значение числа N?



Задача 6. Фигуру с дыркой на картинке разрезали по клеточкам на фигурки вида  и  (необязательно оба вида фигурок должны присутствовать). Какое а) наибольшее; б) наименьшее количество фигурок вида  могло оказаться? *Ответ оформить в виде «а) 100, б) 200».*

Задача 7. Расставьте в некоторых (можно во всех) промежутках между цифрами: 1 6 1 1 2 0 2 0 знаки арифметических действий («+», «–», «×», «÷») так, чтобы значение получившегося выражения равнялось 53. Можно использовать скобки.

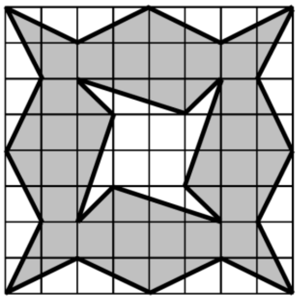
Задача 8. Вычислите
$$\left(\frac{3\frac{4}{7}+2\frac{1}{11}}{5\frac{8}{13}-1\frac{8}{9}}\right)\times\left(\frac{\frac{4}{9}+\frac{7}{13}}{\frac{3}{7}-\frac{4}{11}}\right).$$



Задача 9. Сколько всего прямоугольников изображено на рисунке справа?

Задача 10. В бочке находится 30 литров смеси, содержащей 20% красных чернил и 30% желтых чернил. Остальной объем занимает вода. В бочку долили некоторое количество желтых чернил и некоторое количество красных чернил. После этого красные чернила стали занимать 48% объема бочки, а желтые — в полтора раза меньше, чем красные. Сколько литров красных чернил долили в бочку?

Задача 11. Найдите площадь закрашенной фигуры. Площадь одной клетки равна 1.



Задача 12. Придумайте какое-нибудь четырехзначное число, в записи которого нет нулей, такое, что если к нему прибавить произведение всех его цифр, то получится число с таким же произведением цифр.

Задача 13. Натуральные числа a и b таковы, что $21a+19b=388$. Чему может равняться число $21b+19a$? Укажите все возможные ответы.

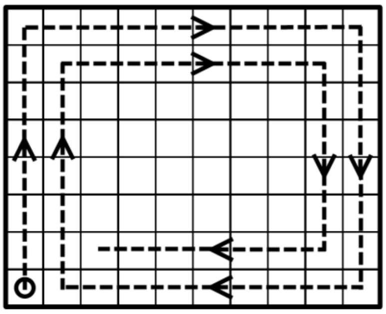
Задача 14. В пустые ячейки квадрата 4×4 нужно вписать числа от 1 до 4 так, чтобы в каждом горизонтальном ряду, в каждой вертикальной колонке и в каждом из четырех выделенных квадратов 2×2 каждое число встречалось ровно по одному разу. Некоторые числа уже расставлены. В ответ нужно записать сумму четырех чисел, стоящих на диагонали, идущей из левого нижнего угла в правый верхний.

	1		
			2
3			
		3	

Задача 15. Чему равно значение выражения $1+2+3-4+5+6+7-8+\ldots+97+98+99-100$ (после каждых трех операций сложения идет одно вычитание)?

Задача 16. Четыре рыболова решили купить лодку. Первый внес 1/2 суммы, внесенной остальными, второй внес 1/3 суммы, внесенной остальными, третий внес 1/4 суммы, внесенной остальными, а четвертый внес 5850 рублей. Сколько денег внес второй рыболов?

Задача 17. Жук ползает по клеткам прямоугольника размером 49×70 (49 строк и 70 столбцов). Он начинает в левом нижнем углу, ползет вверх до упора, потом поворачивает направо, ползет вправо до упора, и так далее. При этом, когда он доходит до клетки, в которой уже побывал, он не идет в нее, а поворачивает направо. На рисунке изображено начала его маршрута. Когда ему некуда будет ползти, жук останавливается. В какой клетке он остановится? В ответе напишите а) номер ее строки, считая **снизу вверх**; б) номер ее столбца, считая **слева направо**. *Ответ оформить в виде «а) 100, б) 200».*



Задача 18. Пять человек, каждый из которых либо рыцарь (говорит только правду), либо лжец (всегда лжет), высказали следующие утверждения. Первый: «Среди второго и третьего ровно один лжец». Второй: «Среди третьего и четвертого ровно один лжец». Третий: «Среди четвертого и пятого ровно один лжец». Четвертый: «Среди пятого и первого ровно один лжец». Пятый: «Первый и второй — оба лжецы». Кто из них лжецы? Укажите всех.

Задача 19. Сколько целых чисел от 1 до 9999 содержат в своей записи ровно две цифры 0?

Задача 20. Про натуральные числа n и k, не превосходящие 1000, известно, что n^2 делится на k, а k^2 делится на n. Найти наибольшее возможное значение дроби n/k.

8 класс

Продолжительность олимпиады — 4 часа

1. Можно ли, используя знаки «+», «−», «·» и несколько выражений a^4 и a^6-1, получить a^6?

2. Можно ли вырезать из прямоугольника 15×8 три клеточки и провести в полученной фигуре два прямолинейных разреза так, чтобы из полученных частей можно было сложить прямоугольник?

3. Клетчатый прямоугольник 5×9 Петя разрезает на две части по границам клеток так, чтобы линия разреза имела форму буквы «Г» — состояла из двух перпендикулярных друг другу отрезков. Вася также поступает с любой из двух получившихся фигур, потом Петя — с одной из трех получившихся и т.д. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает — Петя или Вася — как бы не играл другой?

4. Дан квадрат $ABCD$. Точка N лежит на стороне AD, причём $AN:ND=2:3$, точка F лежит на стороне CD и $DF:FC=1:4$, точка K лежит на стороне AB, причём $AK:KB=1:4$. Найдите угол KNF.

5. Можно ли на некоторые клетки шахматной доски расставить шашки так, чтобы на каждой горизонтали, на каждой вертикали и на каждой диагонали (любой длины, даже состоящей из одной клетки) стояло нечетное количество шашек?

По окончании написания олимпиады листочек с заданиями
можно забрать с собой!

8 класс

Продолжительность олимпиады — 4 часа

1. Можно ли, используя знаки «+», «−», «·» и несколько выражений a^4 и a^6-1, получить a^6?

2. Можно ли вырезать из прямоугольника 15×8 три клеточки и провести в полученной фигуре два прямолинейных разреза так, чтобы из полученных частей можно было сложить прямоугольник?

3. Клетчатый прямоугольник 5×9 Петя разрезает на две части по границам клеток так, чтобы линия разреза имела форму буквы «Г» — состояла из двух перпендикулярных друг другу отрезков. Вася также поступает с любой из двух получившихся фигур, потом Петя — с одной из трех получившихся и т.д. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает — Петя или Вася — как бы не играл другой?

4. Дан квадрат $ABCD$. Точка N лежит на стороне AD, причём $AN:ND=2:3$, точка F лежит на стороне CD и $DF:FC=1:4$, точка K лежит на стороне AB, причём $AK:KB=1:4$. Найдите угол KNF.

5. Можно ли на некоторые клетки шахматной доски расставить шашки так, чтобы на каждой горизонтали, на каждой вертикали и на каждой диагонали (любой длины, даже состоящей из одной клетки) стояло нечетное количество шашек?

По окончании написания олимпиады листочек с заданиями

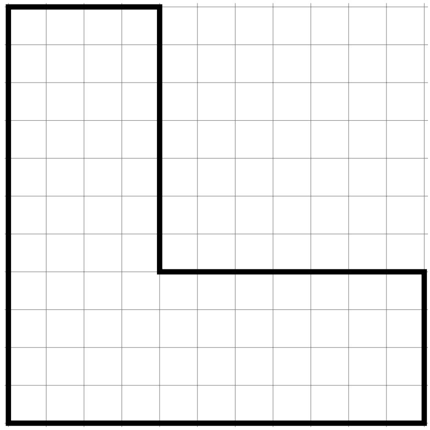
можно забрать с собой!

9 класс

Продолжительность олимпиады — 4 часа

1. У Васи есть калькулятор, который для любых чисел a и b вычисляет числа $a+b$, $a-b$, $\dfrac{1}{a+1}$, $a \neq -1$. Может ли Вася, сделав не больше 6 операций, получить квадрат любого положительного числа?

2. Из клетчатого листочка вырезали фигурку, изображенную жирной линией на рисунке. Петя разрезает эту фигуру на две части по границам клеток так, чтобы линия разреза имела форму буквы «Г» — состояла из двух перпендикулярных друг другу отрезков. Вася также поступает с любой из двух получившихся фигур, потом Петя — с одной из трех получившихся и т.д. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает — Петя или Вася — как бы не играл другой?



3. Длины сторон параллелограмма равны 3 и 5. Биссектрисы всех его внутренних углов ограничивают на плоскости многоугольник. Найти отношение его площади к площади параллелограмма.

4. Найдите наибольшее чётное трехзначное число x, дающее при делении на 5 остаток 2 и удовлетворяющее условию $\text{НОД}(30, \text{НОД}(x, 15)) = 3$.

5. Сколькими способами можно покрыть прямоугольную доску размером 2×13 прямоугольными плитками размером 1×2? (Плитки укладываются так, чтобы они не пересекались и чтобы целиком помещались на доске.)

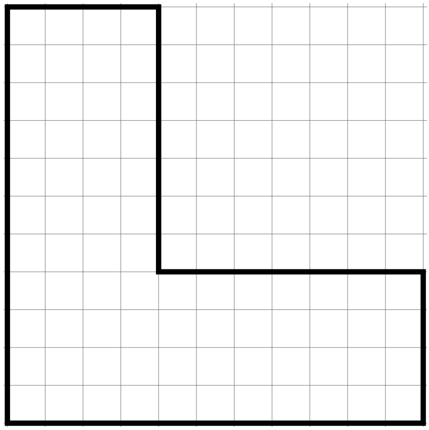
По окончании написания олимпиады листочек с заданиями ***можно забрать с собой!***

9 класс

Продолжительность олимпиады — 4 часа

1. У Васи есть калькулятор, который для любых чисел a и b вычисляет числа $a+b$, $a-b$, $\dfrac{1}{a+1}$, $a \neq -1$. Может ли Вася, сделав не больше 6 операций, получить квадрат любого положительного числа?

2. Из клетчатого листочка вырезали фигурку, изображенную жирной линией на рисунке. Петя разрезает эту фигуру на две части по границам клеток так, чтобы линия разреза имела форму буквы «Г» — состояла из двух перпендикулярных друг другу отрезков. Вася также поступает с любой из двух получившихся фигур, потом Петя — с одной из трех получившихся и т.д. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает — Петя или Вася — как бы не играл другой?



3. Длины сторон параллелограмма равны 3 и 5. Биссектрисы всех его внутренних углов ограничивают на плоскости многоугольник. Найти отношение его площади к площади параллелограмма.

4. Найдите наибольшее чётное трехзначное число x, дающее при делении на 5 остаток 2 и удовлетворяющее условию $\text{НОД}(30, \text{НОД}(x, 15)) = 3$.

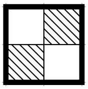
5. Сколькими способами можно покрыть прямоугольную доску размером 2×13 прямоугольными плитками размером 1×2? (Плитки укладываются так, чтобы они не пересекались и чтобы целиком помещались на доске.)

По окончании написания олимпиады листочек с заданиями
можно забрать с собой!

10 класс

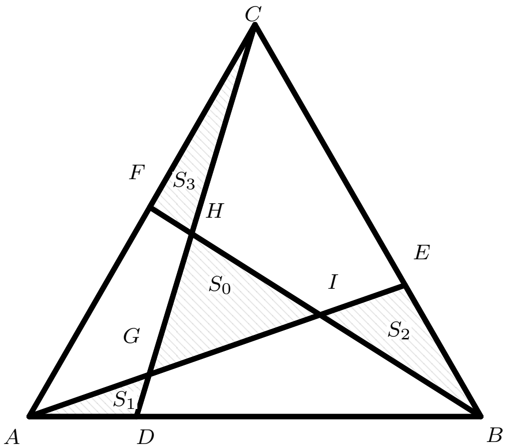
Продолжительность олимпиады — 4 часа

1. Даны два отрезка длины 1 и $\sqrt{2}+\sqrt{5}$. Можно ли с помощью циркуля и линейки без делений построить отрезок длины $\sqrt{6}$?



2. Дана клетчатая доска 7×6. Нёд — фигура из двух клеток, имеющих одну общую вершину (на рисунке два нёда — белый и заштрихованный). Какое максимальное количество нёдов по непересекающимся клеткам можно вырезать из этой доски?

3. В правильном треугольнике ABC проведены отрезки AE, BF, CD так, как показано на рисунке. Площади заштрихованных треугольников равны S_0, S_1, S_2, S_3, причем $S_0 = S_1 + S_2 + S_3$, $S = 5S_0$, где S — площадь треугольника ABC. Докажите, что $BC = BE + CF + AD$.



4. Функция $f(x)$ такова, что для всех значений x выполняется равенство $f(x+1) - f(x) = x + 1$. Известно, что $f(0) = 4$. Найдите $f(62)$.

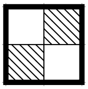
5. Прибор должен из многочлена $2020x^4 + x + 1$, меняя его коэффициенты, получить за несколько шагов многочлен $x^4 + 2020x + 1$ так, чтобы ни на одном из шагов не получался многочлен с целыми корнями. Сумеет ли этот прибор выполнить преобразования, если он умеет делать за один шаг только одну из двух операций: **1)** изменять (увеличить или уменьшить) на 1 какой-либо один (на каждом шаге любой) коэффициент многочлена; **2)** изменять одновременно на единицу какие-либо два (на каждом шаге любые) коэффициента многочлена?

По окончании написания олимпиады листочек с заданиями
можно забрать с собой!

10 класс

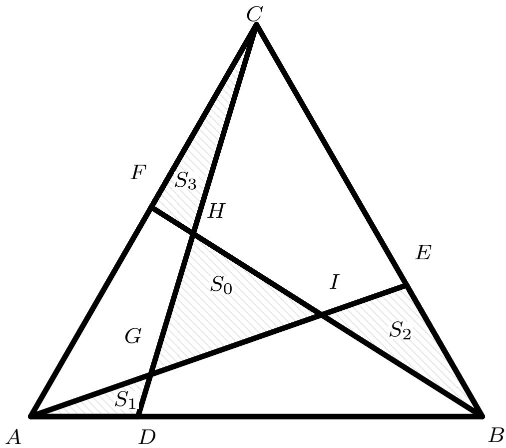
Продолжительность олимпиады — 4 часа

1. Даны два отрезка длины 1 и $\sqrt{2}+\sqrt{5}$. Можно ли с помощью циркуля и линейки без делений построить отрезок длины $\sqrt{6}$?



2. Дана клетчатая доска 7×6. Нёд — фигура из двух клеток, имеющих одну общую вершину (на рисунке два нёда — белый и заштрихованный). Какое максимальное количество нёдов по непересекающимся клеткам можно вырезать из этой доски?

3. В правильном треугольнике ABC проведены отрезки AE, BF, CD так, как показано на рисунке. Площади заштрихованных треугольников равны S_0, S_1, S_2, S_3, причем $S_0 = S_1 + S_2 + S_3$, $S = 5S_0$, где S — площадь треугольника ABC. Докажите, что $BC = BE + CF + AD$.



4. Функция $f(x)$ такова, что для всех значений x выполняется равенство $f(x+1) - f(x) = x + 1$. Известно, что $f(0) = 4$. Найдите $f(62)$.

5. Прибор должен из многочлена $2020x^4 + x + 1$, меняя его коэффициенты, получить за несколько шагов многочлен $x^4 + 2020x + 1$ так, чтобы ни на одном из шагов не получался многочлен с целыми корнями. Сумеет ли этот прибор выполнить преобразования, если он умеет делать за один шаг только одну из двух операций: **1)** изменять (увеличить или уменьшить) на 1 какой-либо один (на каждом шаге любой) коэффициент многочлена; **2)** изменять одновременно на единицу какие-либо два (на каждом шаге любые) коэффициента многочлена?

По окончании написания олимпиады листочек с заданиями ***можно забрать с собой!***

11 класс

Продолжительность олимпиады — 4 часа

1. Разобьём ряд натуральных чисел на группы:

$$(1),\ (2,3),\ (4,5,6)\ (7,8,9,10),\ \ldots$$

Обозначим S_n сумму n-ой группы чисел. Найдите $S_{16} - S_4 - S_1$.

2. Докажите, что если при любом значении x и постоянном c имеет место равенство $f(x+c) = \dfrac{2}{1+f(x)} - 1$, то $f(x)$ — периодическая функция.

3. Хорда AB окружности радиуса R продолжена на отрезок $BC = AB$, точка C соединена отрезком с центром окружности O, причем CO пересекает окружность в точке D. Доказать, что $CD = 4R\sin 18^\circ$, если известно, что на AB можно построить квадрат, вписанный в данную окружность.

4. Найдите все решения уравнения $x^2 - 12 \cdot [x] + 20 = 0$, где $[x]$ — наибольшее целое, не превосходящее x.

5. В каждую ячейку таблицы 6×6 поместили числа $+1$ или -1 так, что произведение всех чисел любой строки и любого столбца является положительным. Сколькими способами это можно сделать?

По окончании написания олимпиады листочек с заданиями
можно забрать с собой!

11 класс

Продолжительность олимпиады — 4 часа

1. Разобьём ряд натуральных чисел на группы:

$$(1),\ (2,3),\ (4,5,6)\ (7,8,9,10),\ \dots$$

Обозначим S_n сумму n-ой группы чисел. Найдите $S_{16}-S_4-S_1$.

2. Докажите, что если при любом значении x и постоянном c имеет место равенство $f(x+c)=\dfrac{2}{1+f(x)}-1$, то $f(x)$ — периодическая функция.

3. Хорда AB окружности радиуса R продолжена на отрезок $BC=AB$, точка C соединена отрезком с центром окружности O, причем CO пересекает окружность в точке D. Доказать, что $CD=4R\sin 18^\circ$, если известно, что на AB можно построить квадрат, вписанный в данную окружность.

4. Найдите все решения уравнения $x^2-12\cdot[x]+20=0$, где $[x]$ — наибольшее целое, не превосходящее x.

5. В каждую ячейку таблицы 6×6 поместили числа $+1$ или -1 так, что произведение всех чисел любой строки и любого столбца является положительным. Сколькими способами это можно сделать?

По окончании написания олимпиады листочек с заданиями ***можно забрать с собой!***