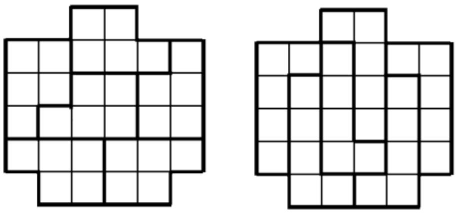
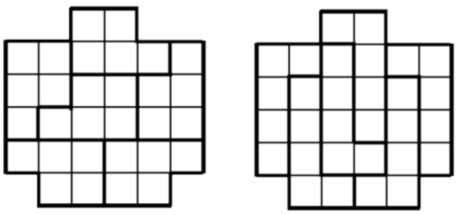
Школьный этап всероссийской олимпиады школьников по математике. 2020-21 учебный год. 4 класс. Ответы.

Каждый правильный ответ — 5 баллов.. Неправильный ответ — 0 баллов.

Задача	Ответ
1.	36
2.	312
3.	Медведь
4.	6471
5.	20 минут. *Ответ «20» тоже принимать!*
6.	25
7.	2
8.	Пример проверять, разрезать можно как минимум на два типа фигурок, возможно, не единственным образом. *Любой верный пример — 5 баллов.* 
9.	27
10.	10

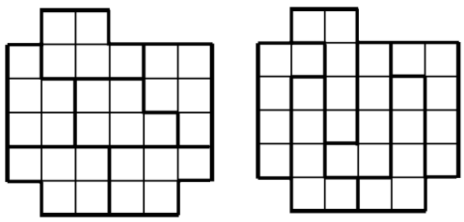
Школьный этап всероссийской олимпиады школьников по математике. 2020-21 учебный год. 4 класс. Ответы.

Каждый правильный ответ — 5 баллов.. Неправильный ответ — 0 баллов.

Задача	Ответ
1.	36
2.	312
3.	Медведь
4.	6471
5.	20 минут. *Ответ «20» тоже принимать!*
6.	25
7.	2
8.	Пример проверять, разрезать можно как минимум на два типа фигурок, возможно, не единственным образом. *Любой верный пример — 5 баллов.* 
9.	27
10.	10

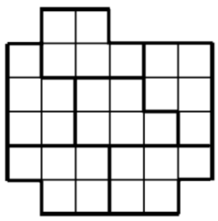
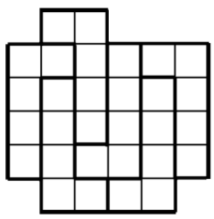
Школьный этап всероссийской олимпиады школьников по математике. 2020-21 учебный год. 5 класс. Ответы.

Каждый правильный ответ — 5 баллов. Неправильный ответ — 0 баллов.

Задача	**Ответ**
1.	161998
2.	81
3.	180 минут или 3 часа.
4.	9
5.	28
6.	22
7.	Паша
8.	Пример проверять, разрезать можно как минимум на два типа фигурок, возможно, не единственным образом. *Любой верный пример — 5 баллов.* 
9.	827
10.	15

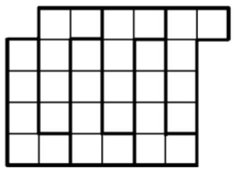
Школьный этап всероссийской олимпиады школьников по математике. 2020-21 учебный год. 5 класс. Ответы.

Каждый правильный ответ — 5 баллов. Неправильный ответ — 0 баллов.

Задача	**Ответ**
1.	161998
2.	81
3.	180 минут или 3 часа.
4.	9
5.	28
6.	22
7.	Паша
8.	Пример проверять, разрезать можно как минимум на два типа фигурок, возможно, не единственным образом. *Любой верный пример — 5 баллов.*  
9.	827
10.	15

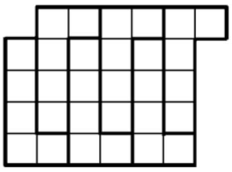
Школьный этап всероссийской олимпиады школьников по математике. 2020-21 учебный год. 6 класс. Ответы.

Каждый правильный ответ — 5 баллов, если не указано иное. Неправильный — 0 баллов.

Задача	Ответ
1.	4 кг. *Ответ «4» тоже принимать!*
2.	150
3.	а) 7; б) 1.2.20 (засчитывать любой ответ, однозначно трактующийся, как 1 февраля 2020 года). *Ответ в п.а) — 3 балла, в п. б) — 2 балла.*
4.	2
5.	1/5 или 0,2. *Несокращенный ответ, например, 2/10 — 4 балла*.
6.	4
7.	Борис
8.	Проверять, например, так. *Любое подходящее под условия разрезание — 5 баллов. Судя по всему, можно разрезать только на такие фигурки* 
9.	9 минут. *Ответ «9» тоже принимать!*
10.	18.

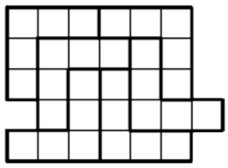
Школьный этап всероссийской олимпиады школьников по математике. 2020-21 учебный год. 6 класс. Ответы.

Каждый правильный ответ — 5 баллов, если не указано иное. Неправильный — 0 баллов.

Задача	Ответ
1.	4 кг. *Ответ «4» тоже принимать!*
2.	150
3.	а) 7; б) 1.2.20 (засчитывать любой ответ, однозначно трактующийся, как 1 февраля 2020 года). *Ответ в п.а) — 3 балла, в п. б) — 2 балла.*
4.	2
5.	1/5 или 0,2. *Несокращенный ответ, например, 2/10 — 4 балла*.
6.	4
7.	Борис
8.	Проверять, например, так. *Любое подходящее под условия разрезание — 5 баллов. Судя по всему, можно разрезать только на такие фигурки* 
9.	9 минут. *Ответ «9» тоже принимать!*
10.	18.

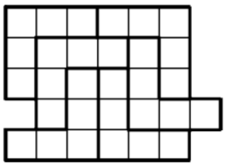
Школьный этап всероссийской олимпиады школьников по математике. 2020-21 учебный год. 7 класс. Ответы.

Каждый правильный ответ — 5 баллов, если не указано иное. Неправильный — 0 баллов.

Задача	Ответ
1.	6.
2.	810
3.	Например, $(13-5)\times(7+9-7-5+3+1)$. *Любая подходящая под условия расстановка знаков — 5 баллов.*
4.	14
5.	4
6.	Вова
7.	Проверять, например, так. *Любое подходящее под условия разрезание — 5 баллов. Судя по всему, можно разрезать только на такие фигурки* 
8.	$-12/5$ или $-2{,}4$. *Несокращенный ответ, например,* $-24/10$*— 4 балла.*
9.	14 км/ч. *Просто ответ «14» — 4 балла*
10.	19.

Школьный этап всероссийской олимпиады школьников по математике. 2020-21 учебный год. 7 класс. Ответы.

Каждый правильный ответ — 5 баллов, если не указано иное. Неправильный — 0 баллов.

Задача	Ответ
1.	6.
2.	810
3.	Например, (13−5)×(7+9−7−5+3+1). *Любая подходящая под условия расстановка знаков — 5 баллов.*
4.	14
5.	4
6.	Вова
7.	Проверять, например, так. *Любое подходящее под условия разрезание — 5 баллов. Судя по всему, можно разрезать только на такие фигурки* 
8.	−12/5 или −2,4. *Несокращенный ответ, например,* −24/10*— 4 балла*.
9.	14 км/ч. *Просто ответ «14» — 4 балла*
10.	19.

8 класс

Общие принципы оценивания работ приведены в таблице.

баллы	правильность (ошибочность) решения
7	полное верное решение
6-7	верное решение с небольшими недочетами, не влияющими на решение
5-6	решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений и дополнений
2-3	доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи
0-1	рассмотрены одельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении)
0	решение неверное, продвижения отсутствуют
0	решение отсутствует

В остальных задачах будут приведены примерные критерии.

1. Проходят ли прямые $y-4x+2=0$, $2y-2x-2=0$, $y-8x+6=0$ через одну точку?

Решение. Да, через точку $(1;2)$.

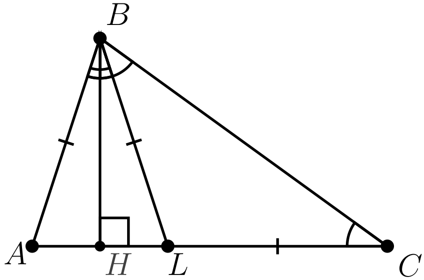
Критерии. *2 балла* — найдена точка пересечения каких-то двух прямых; при этом задача не решена.

2. Произведение четырех последовательных натуральных чисел равно 1680. Найдите эти числа.

Решение. Разложим 1680 на простые множители: $1680=2^4\cdot3\cdot5\cdot7<10^4$. Значит, по меньшей мере, некоторые из чисел — однозначные. Среди искомых есть 7. Раз число 1680 делится на 3, то среди последовательных чисел есть число, делящееся на 3. Это число меньше 9, значит, это число — 6. В наборе не может быть 10, значит, число, делящееся на 5 — это 5. Ответ: $5\cdot6\cdot7\cdot8$.

Критерии. *2 балла* — есть разложение 1680 простые на множители; при этом задача не решена; *4 балла* — доказано, что среди чисел есть однозначные или что среди чисел есть число 7, либо число 6, либо число 5; при этом задача не решена.

3. В треугольнике ABC провели высоту BH и биссектрису BL. Оказалось, что треугольники ABL и LBC равнобедренные, а BH — высота равнобдренного треугольника ABL, проведенная к основанию AL. Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный.



Решение. Из условия следует, что треугольник BLC равнобедренный тупоугольный. Следовательно, $\angle LBC = \angle BCL = 2\alpha$. Тогда из $\triangle ABL$ следует $\angle BAL = 90^\circ - \alpha$. Из теоремы о сумме углов треугольника следует $90^\circ - \alpha + 4\alpha + 2\alpha = 180^\circ$, т.е. $\alpha = 18^\circ$. Значит, углы треугольника: $\angle A = 72^\circ$, $\angle B = 72^\circ$, $\angle C = 36^\circ$.

Критерии. *2 балла* - доказано, что именно $BL = LC$; при этом задача не решена.

4. В многоквартирном доме есть один злостный неплательщик, если он погасит задолженность, то в доме будет 24% неплательщиков, а если его выселят, то неплательщиков станет 25%. Укажите число жильцов в этом доме и какой процент неплательщиков сейчас в этом доме?

Решение. Пусть жителей в доме x человек. Тогда получим уравнение: $0,24 \cdot x = 0,25 \cdot (x - 1)$. Откуда получим, что жителей 25 человек. Значит, неплательщиков сейчас: $1 + 0,24 \cdot 25 = 7$ человек. Следовательно, сейчас неплательщиков 28% от всех жителей.

Критерии. *2 балла* — ввели переменную и составили верное уравнение; *5 балла* — верно найдено общее число жителей; при этом задача не решена.

5. В куче с камнями есть камни массой в 1 г, 2 г, 4 г, 5 г, 10 г, 15 г, 20 г, 25 г и 45 г. Вася и Петя забрали из кучи по 4 камня, причем масса камней Васи относится к массе камней Пети, как 3:2. Камень какой массы остался лежать в куче? Приведите пример, какие камни могли быть у Васи и Пети.

Решение. Масса всех камней, забранных Васей и Петей, кратна 5. Общая масса камней при делении на 5 дает остаток, равный 2, поэтому остаться в куче должен был камень в 2 г. При этом Петя мог забрать камни массы 5, 10, 15 и 20 г — всего 50 г, а Вася — 1, 4, 25, 45 г.

Критерии. *2 балла* — только приведён пример; при этом задача не решена; *5 баллов* — ответ получен и доказан, но пример не приведён.

9 класс

Общие принципы оценивания работ приведены в таблице.

баллы	правильность (ошибочность) решения
7	полное верное решение
6-7	верное решение с небольшими недочетами, не влияющими на решение
5-6	решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений и дополнений
2-3	доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи
0-1	рассмотрены одельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении)
0	решение неверное, продвижения отсутствуют
0	решение отсутствует

В остальных задачах будут приведены примерные критерии.

1. Найдите наименьшее значение выражения $x + 2y$, если известно, что $xy = 2$ и $x > 0$.

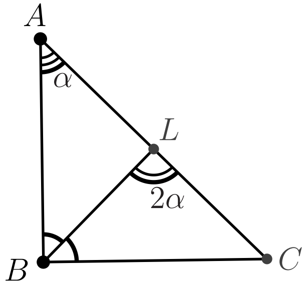
Решение. $y = \dfrac{2}{x}$, значит, $x + 2y = x + \dfrac{4}{x} = \dfrac{x^2+4}{x} = \dfrac{(x-2)^2+2x}{x} = \dfrac{(x-2)^2}{x} + 2 \geq 2$. Ответ: 2.

2. Может ли число, состоящее из 312 единиц и 100 нулей, быть полным квадратом какого-то натурального числа?

Решение. Нет, не может. Кратность каждого простого делителя числа, представляющего полный квадрат, — четная. Рассматриваемое число, независимо от порядка следования цифр, делится на 3, но не делится на 9.

Критерии. 2 балла — сказано, что кратность каждого простого делителя чётная, но задача не решена.

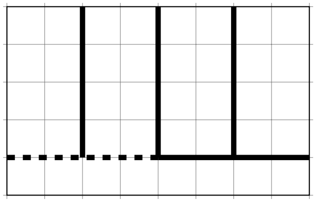
3. Из вершины B треугольника ABC проведена биссектриса BL. Оказалось, что треугольник BLC — равнобедренный с вершиной L. Известно, что $\angle BAC = \dfrac{1}{2}\angle BLC$. Чему равна площадь треугольника ABC, если $BL = 2$?



Решение. Обозначим $\angle BAL = \alpha$, тогда $\angle BLC = 2\alpha$. Для треугольника BAL имеем: $\angle ABL = \alpha$. Следовательно, $\angle ACB = \alpha$. По теореме о сумме углов треугольника получаем $4\alpha = 180°$. Т.е. $\alpha = 45°$. Поэтому $\triangle ABC$ — равнобедренный прямоугольный. Так как $BL = 2$, из треугольника BLC получаем $BC = 2\sqrt{2}$. Значит, площадь треугольника $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 4$.

Критерии. *3 балла* — найден угол альфа, но задача не решена.

4. Участок 160×100 метров выделен под огороды и обнесен огадой снаружи. Как установить внутри участка 5 прямолинейных оград одинаковой длины, чтобы разбить участок на 5 прямоугольных участков одинаковой площади?



Решение. Ограды имеют длину 80 м. Пример на рисунке (одна клетка — 20×20 метров).

Критерии. *3 балла* — найдена длина оград, но задача не решена.

5. Докажите, что уравнение

$$\frac{1}{x+2019} - \frac{1}{x+2020} + \frac{1}{x+2021} = 0$$

не имеет корней.

Решение. Сделаем замену $t = x + 2020$. Тогда

$$\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{t+1} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{t^2+1}{t(t+1)(t-1)} = 0.$$

Последнее уравнение решений не имеет. Значит, исходное уравнение тоже решений не имеет.

Критерии. *2 балла* — продвижения до квадратного уравнения.

10 класс

Общие принципы оценивания работ приведены в таблице.

баллы	правильность (ошибочность) решения
7	полное верное решение
6-7	верное решение с небольшими недочетами, не влияющими на решение
5-6	решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений и дополнений
2-3	доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи
0-1	рассмотрены одельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении)
0	решение неверное, продвижения отсутствуют
0	решение отсутствует

В остальных задачах будут приведены примерные критерии.

1. Упростите выражение $\sqrt{21-12\sqrt{3}}-\sqrt{21+12\sqrt{3}}$. Если результат упрощения — целое число, то прибавьте к результату 6, а если результат нецелый, то прибавьте $4\sqrt{3}$.

Решение. $\sqrt{21-12\sqrt{3}}-\sqrt{21+12\sqrt{3}}=-6$. Ответ: 0.

2. Докажите неравенство: $\dfrac{2x^2+3}{\sqrt{2x^2+2}}\geq 2$.

Решение. $\dfrac{2x^2+3}{\sqrt{2x^2+2}}=\dfrac{2x^2+2}{\sqrt{2x^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2x^2+2}}=\sqrt{2x^2+2}+\dfrac{1}{\sqrt{2x^2+2}}$. Так как для любого положительного a верно неравенство $a+\dfrac{1}{a}\geq 2$, мы получаем требуемое.

3. В треугольнике ABC угол $C=120^\circ$, $\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$. Найдите угол B.

Решение. По теореме косинусов: $AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos 120^\circ=AC^2+BC^2+AC\cdot BC$. По теореме синусов: $\sin B=\dfrac{AC\cdot\sin 120^\circ}{AB}=\dfrac{\sqrt{3}AC}{2AB}$, т.е. $\sin^2 B=\dfrac{3AC^2}{4AB^2}$.

Значит, $\sin^2 B = \dfrac{3AC^2}{4AC^2 + 4BC^2 + 4AC \cdot BC} = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{1 + \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 + \frac{BC}{AC}}$. Из условия находим $\sin^2 B = \dfrac{1}{2}$, следовательно, $\sin B = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \angle B = 45^\circ$.

Критерии. *3 балла* — использованы теорема косинусов или теорема синусов, но задача не решена.

4. На урок рисования пришли 30 детей и принесли 52 карандаша 7 различных цветов. Каждый принес хотя бы один карандаш. Докажите, что у двоих детей наборы цветов карандашей совпадают.

Решение. Пусть x детей принесли по одному карандашу, тогда $30-x$ детей принесли хотя бы по два. Тогда общее количество карандашей не меньше $x+2(30-x) = 60-x$; значит, $52 \geq 60-x$, или $x \geq 8$. Значит, хотя бы 8 детей принесли по одному карандашу, тогда два из этих карандашей будут одного цвета.

Критерии. *3 балла* — найдено число детей, принесших по одному карандашу, но задача не решена.

5. При каких a система $\begin{cases} 4x - [x] = 3a + 2 \\ 4[x] - 3\{x\} = 5a + 14 \end{cases}$ имеет решение? Найдите такие x. (Здесь $[x]$ — наибольшее целое число, не превосходящее x, $\{x\} = x - [x]$. Например, $[4{,}7] = 4$, $[-2{,}7] = -3$, $\{4{,}7\} = 4{,}7 - 4 = 0{,}7$, $\{-2{,}7\} = -2{,}7 + 3 = 0,3$.)

Решение.

$$\begin{cases} 4x - [x] = 3a + 2 \\ 4[x] - 3\{x\} = 5a + 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4[x] + 3\{x\} = 3a + 2 \\ 4[x] - 3\{x\} = 5a + 14 \end{cases} \Rightarrow [x] = a + 2.$$

Последнее равенство значит, что $a \in \mathbb{Z}$. После подстановки получим $\{x\} = -\dfrac{a}{3} - 2$. Так как $0 \leq \{x\} < 1$, то $0 \leq -\dfrac{a}{3} - 2 < 1$, откуда $-9 < a \leq -6$. Значит, $a \in \{-6; -7; -8\}$. Найдем x.

1) $a = -6$. Тогда $[x] = -4$ и $\{x\} = 0$. Т.е. $x = -4$.

2) $a = -7$. Тогда $[x] = -5$ и $\{x\} = \dfrac{1}{3}$. Т.е. $x = -4\dfrac{2}{3}$.

3) $a = -8$. Тогда $[x] = -6$ и $\{x\} = \dfrac{2}{3}$. Т.е. $x = -5\dfrac{1}{3}$.

Критерии. *3 балла* — доказано, что a целое; при этом задача не решена; *5 баллов* — верно найдено множество возможных значений a; при этом задача не решена.

11 класс

Общие принципы оценивания работ приведены в таблице.

баллы	правильность (ошибочность) решения
7	полное верное решение
6-7	верное решение с небольшими недочетами, не влияющими на решение
5-6	решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений и дополнений
2-3	доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи
0-1	рассмотрены одельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении)
0	решение неверное, продвижения отсутствуют
0	решение отсутствует

В остальных задачах будут приведены примерные критерии.

1. Упростите выражение:

$$\left(\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right)\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}.$$

Решение. Так как $9+4\sqrt{5}=4+4\sqrt{5}+5=(2+\sqrt{5})^2$, то

$$\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right)\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=2\sqrt[3]{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})}=-2.$$

2. Докажите, что если углы треугольника ABC связаны равенством

$$\sin\left(A-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}-B\right),$$

то треугольник прямоугольный.

Решение.

$$\sin\left(A-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}-B\right)\Rightarrow 2\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{A+B}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=0$$

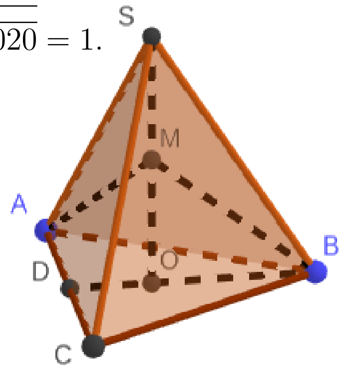
Так как A и B — углы треугольника, то $\cos\left(\dfrac{A-B}{2}\right)\neq 0$.

Значит $\sin\left(\dfrac{A+B}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)=0$, т.е. $\dfrac{A+B}{2}-\dfrac{\pi}{4}=0$. Следовательно, $\dfrac{C}{2}=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow\angle C=\dfrac{\pi}{2}$.

Критерии. *2 балла* - выполнено преобразование, приведённое в 1-ой строке авторского решения; при этом задача не решена; *6 баллов* — задача решена, но не объяснено, почему $\cos\left(\dfrac{A-B}{2}\right)\neq 0$.

3. Решите уравнение:

$$\sqrt{x-2019-2\sqrt{x-2020}}+\sqrt{x-2016-4\sqrt{x-2020}}=1.$$



Решение. Сделаем замену $\sqrt{x-2020}=t$, $t\geq 0$. Тогда $x=t^2+2020$. Имеем $\sqrt{t^2-2t+1}+\sqrt{t^2-4t+4}=1$, т.е. $|t-1|+|t-2|=1$. Откуда получаем $1\leq t\leq 2$. Значит, $x\in[2021;2024]$.

Критерии. 2 балла — исходное уравнение упрощено путём введения новой переменной (либо был выделен полный квадрат); при этом задача не решена.

4. В правильном тетраэдре середина высоты соединена отрезками с вершинами основания. Докажите, что эти отрезки взаимно перпендикулярны.

Решение. Пусть a длина ребра правильного тетраэдра $SABC$. Тогда $OB=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$, а из треугольника SOB, где $\angle O=90^\circ$, следует, что $SO=\sqrt{a^2-\dfrac{a^2}{3}}=\dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Пусть M — середина SO. Из $\triangle OMB$ получим:

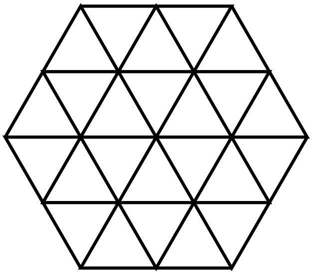
$$MB^2=MO^2+OB^2=\left(\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{a^2}{2}.$$

В треугольнике AMB:

$$MB^2+MA^2=\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}=a^2=AB^2,$$

следовательно, $\angle AMB=90^\circ$, т.е. $AM\perp BM$.

Критерии. *2 балла* — найдена высота тетраэдра; при этом задача не решена; *3 балла* — найдено MB; при этом задача не решена.



5. Есть правильный шестиугольник со стороной 2, разлинованный на равносторонние треугольники со стороной 1. Петя и Вася ходят по очереди. В свой ход игрок разрезает фигурку на две части по прямой линии сетки, одну часть выкидывает, а другую передает сопернику. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Первый ходит Петя. Кто победит в игре?

Решение. Заметим, что в любой момент у полученной фигуры углы равны либо $60°$, либо $120°$. Вася победит, если будет придерживаться следующей стратегии: ***если у фигуры есть острый угол, отломить единичный равносторонний треугольник и отдать его сопернику, иначе разрезать фигуру по линии симметричной предыдущей линии разреза относительно центра фигуры, имевшейся на руках соперника непосредственно перед его ходом. Следуя этой стратегии, второй игрок всегда будет иметь ход, а потому не проиграет.*** Поскольку кто-то должен проиграть, то это будет Петя.

Критерии. *4 балла* - описана верная стратегия, но при этом не объяснено, кто победитель.