7 класс

Задача 7.1. Грузовики на трассе.
По загородной трассе едет колонна из семи одинаковых грузовиков. Автомобиль «Лада Калина», двигающийся во встречном, проезжает мимо колонны за 6 с, в то время как такой же автомобиль, едущий с той же скоростью в попутном направлении, обгоняет колонну за 24 с. С какой скоростью двигается колонна? Длина грузовика равна 8 м, длина «Калины» — 4 м, дистанция между грузовиками — 30 м.

Ответ: 15 м/с.

Решение: Пусть v — скорость автомобиля «Лада Калина», а u — скорость колонны грузовиков. Если «Калина» едет навстречу колонне, скорость их сближения равна $u+v$. Путь, который относительно колонны должна проехать «Лада Калина», составляет

$$s = 7 \times 8 \text{ м} + 6 \times 30 \text{ м} + 4 \text{ м} = 240 \text{ м}.$$

Таким образом, получаем, что

$$u + v = \frac{240 \text{ м}}{6 \text{ с}} = 40 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда «Калина» обгоняет колонну. Скорость сближения в этом случае равна

$$v - u = \frac{240 \text{ м}}{24 \text{ с}} = 10 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Вычитая почленно полученные уравнения, находим, что $u = (40 \text{ м/с} + 10 \text{ м/с})/2 = 15 \text{ м/с}$.

Критерии:

Найден путь «Калины» относительно колонны . . . . 3 балла
Найдена связь между скоростями сближения и скоростями «Калины» и колонны . . . . 2 балла
Найдены числовые значения скорости сближения в обоих случаях . . . . 2 балла
Найдена скорость колонны . . . . 3 балла

Задача 7.2. Винни-Пух и часы.
Медвежонок Винни-Пух и Кролик договорились встретиться под Большим Дубом в 12 часов дня. Пунктуальный Кролик вышел из дома в 11:20 и пришёл к Дубу ровно в полдень. Винни-Пух же, выйдя из дома (по своим часам) в 10:30, решил, что можно не торопиться и неспешно направился к месту встречи. К своему удивлению, он нашёл там Кролика, заявившего, что медвежонок опоздал на 15 минут. Насколько часы Винни-Пуха отстают от часов Кролика? Известно, что Большой Дуб находится ровно посередине между домами Пуха и Кролика, а средняя скорость ходьбы Винни-Пуха была вдвое меньше средней скорости Кролика.

Ответ: На 25 минут.

Решение: Из условия задачи следует, что Кролик шёл к месту встречи 40 мин. Так как скорость Винни-Пуха в два раза меньше, чем скорость Кролика, а пройденные ими расстояния совпадают, Винни-Пух дошёл до места встречи за 80 мин. Это произошло в 12:15 (по часам Кролика). Отсюда следует, что медвежонок вышел из дома в 10:55 (опять же по часам Кролика). Однако его собственные часы показывали в это время 10:30. Значит, они отстают на 25 мин.

Критерии:

Найдено время движения Кролика . . . . 3 балла
Найдено время движения Винни-Пуха . . . . 3 балла
Найдено время выхода Винни-Пуха из дома по часам Кролика . . . . 3 балла
Найдено отставание часов Винни-Пуха . . . . 1 балл

Задача 7.3. График скорости.
Разбирая свой архив, учёный Иннокентий Иванов обнаружил график зависимости скорости некоторого тела от пройденного им пути (рис. 7.1). Числовые значения, написанные на графике, сохранились лишь частично. Помогите Иннокентию Иванову определить среднюю скорость тела на всём пути.

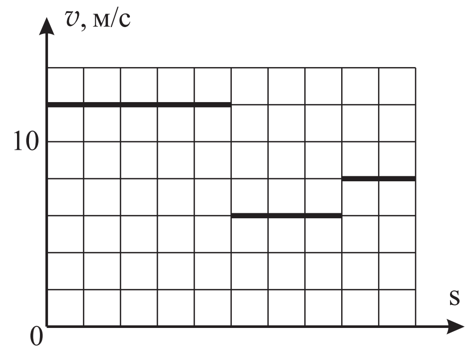


Рис. 7.1.

Ответ: $\approx 8{,}6$ м/с.

Решение: Из графика следует, что путь тела состоял из трёх участков, на каждом из которых его скорость была постоянной: $v_1 = 12$ м/с, $v_2 = 6$ м/с, $v_3 = 8$ м/с. Так как весь путь тела s соответствует 10 клеткам, а длины участков равны 5, 3 и 2 клетки, получаем, что

$$s_1 = \frac{s}{2}, \quad s_2 = \frac{3s}{10}, \quad s_3 = \frac{s}{5}.$$

Рассчитаем теперь значение средней скорости

$$v_{\text{ср}} = \frac{s}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{s}{\frac{s}{2v_1} + \frac{3s}{10v_2} + \frac{s}{5v_3}} = \frac{1}{\frac{1}{2v_1} + \frac{3}{10v_2} + \frac{1}{5v_3}} = \frac{1}{\frac{1}{24} + \frac{1}{20} + \frac{1}{40}}\ \frac{\text{м}}{\text{с}} = \frac{120}{14}\ \frac{\text{м}}{\text{с}} \approx 8{,}6\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Критерии:

Найдены скорости на всех участках . . . . 2 балла
Найдены длины всех участков (например, через доли пути) . . . . 2 балла
Найдено время на всех участках . . . . 3 балла
Найдено значение средней скорости . . . . 3 балла

Задача 7.4. Объём куба.

Большой деревянный куб распилили на тысячу одинаковых маленьких кубиков. Используя рис. 7.2, на котором изображён ряд из таких маленьких кубиков и линейка с сантиметровыми делениями, определите объём исходного большого куба.

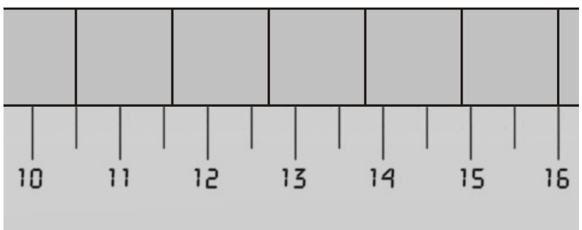


Рис. 7.2.

Ответ: 1331 см^3.

Решение: Цена деления линейки составляет 0,5 см. По рисунку видно, что длина ряда из пяти кубиков равна 5,5 см. Следовательно, длина ребра одного кубика составляет 1,1 см. Отсюда находим объём кубика $(1{,}1\ \text{см})^3 = 1{,}331$ см^3. Объём большого куба равен 1000 объёмов маленьких: $V = 1331$ см^3.

Критерии:

Рассмотрен ряд из пяти кубиков . . . . 2 балла
Найдена ряда кубиков . . . . 3 балла
Найдена длина ребра одного кубика . . . . 2 балла
Найден объём большого куба . . . . 3 балла

Максимально возможный балл в 7 классе 40

8 класс

Задача 8.1. Хитрый способ.
Пират Джон Сильвер придумал новый способ перевозки своих сокровищ. Согласно плану, мешки с серебряными монетами прикрепляются под днищем лодки Сильвера, оставаясь невидимыми для других пиратов. Какое максимальное количество мешков сможет таким способом перевезти Джон Сильвер, если обычным способом, когда сокровища лежат в лодке, он может перевезти 19 мешков? Все мешки одинаковые. Объёмом материи, из которой они сделаны, и креплений можно пренебречь. Плотность воды равна 1000 кг/м^3, серебра — 10500 кг/м^3.

Ответ: 21 мешок.

Решение: Пусть M — масса лодки, V — максимальный объём, на которой она может погрузиться, m — масса одного мешка. В первом случае (когда Сильвер перевозит мешки в лодке) условие плавания будет иметь вид:

$$(M + 19m)g = \rho_в gV \quad \Rightarrow \quad V = \frac{M + 19m}{\rho_в}.$$

В случае, когда N мешков находятся под водой, условие плавания запишется как

$$(M + Nm)g = \rho_в g\left(V + \frac{Nm}{\rho_с}\right).$$

Подставляя выражение для объёма V, получаем

$$M + Nm = \rho_в\left(\frac{M + 19m}{\rho_в} + \frac{Nm}{\rho_с}\right) \quad \Rightarrow \quad M + Nm = M + 19m + Nm\frac{\rho_в}{\rho_с}.$$

Отсюда

$$N = 19 + N\frac{\rho_в}{\rho_с} \quad \Rightarrow \quad N = \frac{19\rho_c}{\rho_c - \rho_в} = \frac{19 \cdot 10500 \text{ кг/м}^3}{9500 \text{ кг/м}^3} = 21.$$

Критерии:
Указано, что объём погруженной части лодки сохраняется . . . . 2 балла
Записано условие плавания в первом случае . . . . 2 балла
Записано условие плавания в втором случае . . . . 3 балла
Найдено значение N . . . . 3 балла

Задача 8.2. Заполнение бассейна.
Бассейн спортивного комплекса «Дружба» наполняется водой с помощью трёх одинаковых насосов. Молодой служащий Василий Петров включил сначала только один из насосов. Уже когда бассейн был заполнен на две трети своего объёма, Василий вспомнил по остальные и тоже их включил. Сколько времени заполнялся бассейн в этот раз, если обычно (при трёх работающих насосах) он заполняется за 1,5 ч?

Ответ: 3,5 ч.

Решение: Как сказано в условии, три насоса заполняют бассейн за 1,5 ч. Соответственно, один работающий насос заполняет бассейн в 3 раза дольше, то есть за 4,5 ч. Василий заполнял 2/3 бассейна с помощью одного насоса и затратил на это 2/3 · 4,5 ч = 3 ч. Оставшуюся 1/3 бассейна он заполнял тремя насосами. На это ушло 1/3 · 1,5 ч = 0,5 ч. Отсюда получаем, что общее время, затраченное Василием на заполнение бассейна, равно 3 ч + 0,5 ч = 3,5 ч.

Критерии:
Найдено время заполнения бассейна одним насосом . . . . 3 балла
Найдено время заполнения 2/3 бассейна одним насосом . . . . 3 балла
Найдено время заполнения 1/3 бассейна тремя насосами . . . . 3 балла
Найдено время заполнения всего бассейна . . . . 1 балл

Задача 8.3. Опыты с чайником.
Восьмиклассник Петя экспериментировал с подаренным ему на день рождения стальным электрическим чайником. В результате опытов оказалось, что кусок льда массой 1 кг, имеющий температуру 0 °C, расплавляется в чайнике за 1,5 мин. Получившаяся при этом вода доходит до кипения за 2 мин. Чему равна масса подаренного Пете чайника? Удельная теплоёмкость стали равна 500 Дж/(кг · °C), воды — 4200 Дж/(кг · °C), удельная теплота плавления льда равна 330 кДж/кг. Теплообменом с окружающей средой пренебречь. Температуры чайника и его содержимого в течение всего эксперимента совпадают.

Ответ: 0,4 кг.

Решение: Пусть P — мощность чайника, m — его масса. В первом случае температура чайника не меняется, а тепло, вырабатываемое им, идёт только на плавление льда $Pt_1 = \lambda M$, где M — масса льда, λ — его удельная теплота плавления, $t_1 = 1{,}5$ мин — время процесса. Во втором случае за время $t_1 = 2$ мин происходит нагрев чайника и его содержимого от 0 °C до 100 °C:

$$Pt_2 = c_{\text{в}} M \cdot 100\,^\circ\text{C} + c_{\text{ст}} m \cdot 100\,^\circ\text{C}.$$

Выражая из первого равенства P и подставляя во второе, получаем

$$\frac{\lambda M t_2}{t_1} = c_{\text{в}} M \cdot 100\,^\circ\text{C} + c_{\text{ст}} m \cdot 100\,^\circ\text{C} \quad \Rightarrow \quad m = M\left(\frac{\lambda t_2}{t_1 c_{\text{ст}} \cdot 100\,^\circ\text{C}} - \frac{c_{\text{в}}}{c_{\text{ст}}}\right).$$

Отсюда, после подстановки числовых значений, находим массу чайника

$$m = 1\text{ кг}\left(\frac{330000\text{ Дж/кг} \cdot 2\text{ мин}}{1{,}5\text{ мин} \cdot 500\text{ Дж/(кг} \cdot {}^\circ\text{C)} \cdot 100\,^\circ\text{C}} - \frac{4200\text{ Дж/(кг} \cdot {}^\circ\text{C)}}{500\text{ Дж/(кг} \cdot {}^\circ\text{C)}}\right) = 0{,}4\text{ кг}.$$

Критерии:
Введена мощность чайника . . . . 1 балл
Уравнение теплового баланса в случае со льдом . . . . 3 балла
Уравнение теплового баланса в случае с водой . . . . 3 балла
Найдено значение массы чайника . . . . 3 балла

Задача 8.4. Плотность неизвестной жидкости.
В стакан с неизвестной жидкостью с помощью системы блоков погружены два цилиндрических тела одинаковой массы, но разных плотностей $\rho_1 = 800$ кг/м^3 и $\rho_2 = 600$ кг/м^3 (см. рис. 8.1). Система находится в равновесии, если оба тела погружены ровно наполовину. Чему равна плотность неизвестной жидкости? Блоки и нити невесомы.

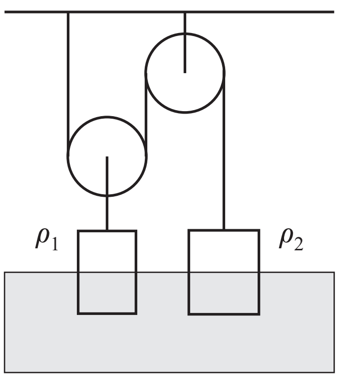


Рис. 8.1.

Ответ: 960 кг/м^3.

Решение: Пусть ρ — плотность неизвестной жидкости, а m — масса первого и второго тела, V_1 и V_2 — их объёмы. Вес обоих тел, погруженных в жидкость, равен

$$P_1 = mg - \rho g V_1/2 = mg\left(1 - \frac{\rho}{2\rho_1}\right), \quad P_2 = mg - \rho g V_2/2 = mg\left(1 - \frac{\rho}{2\rho_2}\right).$$

Так как первое тело подвешено к подвижному блоку, его вес должен быть в два раза больше веса второго тела $P_1 = 2P_2$. Отсюда получаем, что

$$mg\left(1 - \frac{\rho}{2\rho_1}\right) = 2mg\left(1 - \frac{\rho}{2\rho_2}\right) \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{\rho}{2\rho_1} = 2 - \frac{\rho}{\rho_2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \rho\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{2\rho_1}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{1}{\dfrac{1}{\rho_2} - \dfrac{1}{2\rho_1}}.$$

Подставляя сюда числовые значения, находим, что $\rho = 960$ кг/м^3.

Критерии:

Найдены объёмы тел как отношение массы и плотности . . . . 1 балл
Записано выражения для весов грузов . . . . 4 балла
Условие, что $P_1 = 2P_2$ . . . . 2 балла
Найдено значение плотности жидкости . . . . 3 балла

Максимально возможный балл в 8 классе 40

9 класс

Задача 9.1. Гонки с ускорением.
Гонщик Виталий Петров проехал половину пути от старта до финиша со скоростью 100 км/ч. Затем он нажал на педаль газа и вторую половину пути двигался с постоянным ускорением. С какой средней скоростью преодолел дистанцию гонщик, если на финише его скорость оказалась равной 200 км/ч?

Ответ: 120 км/ч.

Решение: Пусть v_1 — скорость гонщика на первой половине пути, а v_2 — его скорость на финише. Ускорение, с которым гонщик двигался на второй половине, равно $a = (v_2 - v_1)/t_2$, где t_2 — время прохождения второй половины пути. Найдём среднюю скорость на втором участке

$$v_{\text{ср}2} = \frac{s_2}{t_2} = \frac{v_1 t_2 + a t_2^2/2}{t_2} = v_1 + \frac{a t_2}{2} = \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

Рассчитаем теперь среднюю скорость на всём пути

$$v_{\text{ср}} = \frac{s}{t_1 + t_2} = \frac{s}{\dfrac{s}{2v_1} + \dfrac{s}{2v_{\text{ср}2}}} = \frac{1}{\dfrac{1}{2v_1} + \dfrac{1}{v_1 + v_2}} = 120\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

Критерии:
Найдена средняя скорость на втором участке . . . . 4 балла
Найдены формулы для времени на всех участках . . . . 3 балла
Найдено средняя скорость на всём пути . . . . 3 балла

Задача 9.2. Котёнок и зеркало.
Маленький котёнок увидел своё отражение в большом плоском зеркале. В этот момент рабочие начали переносить зеркало в другое место со скоростью $u = 1$ м/с. Котёнок стал его догонять со скоростью v (см. рис. 9.1). Чему равна эта скорость, если отражение котёнка двигается относительно земли со скоростью 0,6 м/с? Все скорости направлены вдоль одной прямой.

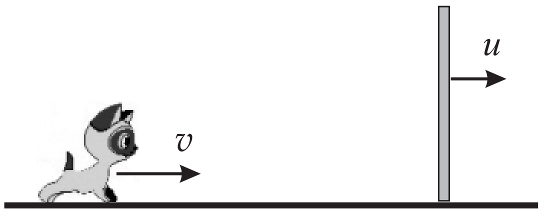


Рис. 9.1.

Ответ: 1,4 м/с или 2,6 м/с.

Решение: Пусть u' — скорость отражения. Заметим, что в условии задачи не сказано, в какую сторону движется отражение котёнка. Поэтому необходимо рассмотреть два случая — отражение движется направо и налево.
Рассмотрим первый случай. Перейдём в систему отсчёта, связанную с зеркалом. В ней скорость котёнка равна $v - u$, а скорость отражения составляет $u - u'$. В системе отсчёта, где зеркало покоится, эти скорости должны быть равны. Следовательно,

$$v - u = u - u' \quad \Rightarrow \quad v = 2u - u' = 1{,}4 \text{ м/с}.$$

Во втором случае, рассуждая аналогично, получаем

$$v - u = u + u' \quad \Rightarrow \quad v = 2u + u' = 2{,}6 \text{ м/с}.$$

Критерии:

Скорость котёнка в системе отсчёта зеркала . . . . 2 балла
Скорость отражения в системе отсчёта зеркала . . . . 2 балла за каждый случай
Нахождение скорости котёнка . . . . 2 балла за каждый случай

Задача 9.3. Плотность воздуха.

Учёный Иннокентий Иванов решил провести эксперимент. Он взял равноплечный рычаг с длиной плеча 50 см и два шара. Первый шар учёный наполнил водородом, второй — гелием, прикрепил к концам рычага (рис. 9.2) и поместил в специальную камеру, плотность воздуха в которой можно регулировать. Вначале плотность воздуха составляла 1,28 кг/м^3, и система находилась в равновесии. Затем учёный понизил плотность воздуха в камере. Чтобы восстановить равновесие системы ему пришлось сдвинуть место привязи шара с водородом на 1 см. Чему равна теперь плотность воздуха в камере? Плотность водорода равна 0,09 кг/м^3, плотность гелия — 0,18 кг/м^3.Массой и объёмом нитей, а также массой и объёмом оболочек шаров пренебречь. Объём шаров во время эксперимента не меняется.

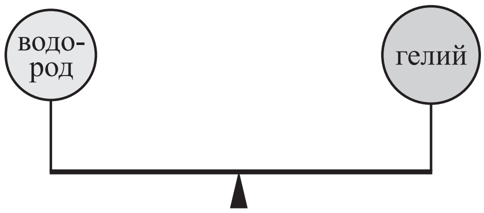


Рис. 9.2.

Ответ: 1,05 кг/м^3.

Решение: Пусть V_1 — объём шара с водородом, V_2 — объём шара с гелием. Найдём подъёмную силу $F = F_А - F_т$, создаваемую каждым шаром (ρ_1, ρ_2 и ρ — плотности водорода, гелия и воздуха соответственно):

$$\text{Шар с водородом:} \qquad F_1 = (\rho - \rho_1)V_1 g,$$

$$\text{Шар с гелием:} \qquad F_2 = (\rho - \rho_2)V_2 g.$$

Так как система находится в равновесии, и плечи равны друг другу, то

$$F_1 = F_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{\rho - \rho_1}{\rho - \rho_2} = \frac{119}{110}.$$

Пусть теперь плотность воздуха уменьшилась до ρ'. Найдём новые значения подъёмной силы:

$$\text{Шар с водородом:} \qquad F_1' = (\rho' - \rho_1)V_1 g,$$

$$\text{Шар с гелием:} \qquad F_2' = (\rho' - \rho_2)V_2 g.$$

Запишем правило моментов, учитывая, что левое плечо уменьшилось на 1 см, т.е. $L_1 = 49$ см, $L_2 = 50$ см

$$F_1' L_1 = F_2' L_2 \quad \Rightarrow \quad (\rho' - \rho_1)V_1 L_1 = (\rho' - \rho_2)V_2 L_2 \quad \Rightarrow \quad \rho' - \rho_1 = (\rho' - \rho_2) \cdot \frac{V_2 L_2}{V_1 L_1}.$$

Решим получившееся уравнение, учитывая, что $V_2 L_2 / V_1 L_1 = 85/77$,

$$\rho' = \frac{85\rho_2 - 77\rho_1}{8} = 1{,}04625 \text{ кг/м}^3 \approx 1{,}05 \text{ кг/м}^3.$$

Критерии:

Найдены выражения для подъёмных сил в первом случае . . . . 2 балла

Записано правило моментов в первом случае или условие $F_1 = F_2$ . . . . 1 балл
Найдены выражения для подъёмных сил в втором случае . . . . 2 балла
Записано правило моментов во втором случае . . . . 2 балла
Найдена плотность ρ' . . . . 3 балла

Задача 9.4. Юный электрик.

В наборе «Юный электрик» было две лампы с номинальной мощностью $P_1 = 6$ Вт и $P_2 = 9$ Вт, рассчитанные на одно и то же напряжение U. Найти мощности P_1' и P_2', которые будут выделяться на каждой лампе, если их соединить последовательно и подключить к источнику с напряжением $2U$. Сопротивление ламп считать постоянным.

Ответ: $P_1' = 8{,}64$ Вт, $P_2' = 5{,}76$ Вт.

Решение: Сопротивление ламп равно $R_1 = U^2/P_1$ и $R_2 = U^2/P_2$. Если лампы включены последовательно, то их общее сопротивление равно

$$R = R_1 + R_2 = U^2\left(\frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2}\right) = \frac{U^2(P_1 + P_2)}{P_1 P_2},$$

а сила тока, текущего через них, задаётся формулой

$$I = \frac{2U}{R} = \frac{2P_1P_2}{U(P_1 + P_2)}.$$

Вычислим мощность, выделяющуюся на обеих лампах:

$$P_1' = I^2R_1 = \frac{4P_1^2P_2^2}{U^2(P_1 + P_2)^2}\cdot\frac{U^2}{P_1} = \frac{4P_1P_2^2}{(P_1 + P_2)^2} = 8{,}64\text{ Вт},$$

$$P_2' = I^2R_2 = \frac{4P_1^2P_2^2}{U^2(P_1 + P_2)^2}\cdot\frac{U^2}{P_2} = \frac{4P_1^2P_2}{(P_1 + P_2)^2} = 5{,}76\text{ Вт}.$$

Критерии:

Найдены выражения для сопротивлений ламп . . . . 2 балла
Найдено общее сопротивление ламп при последовательном соединении . . . . 2 балла
Найдено выражение для силы тока . . . . 2 балла
Найдено значение P_1' . . . . 2 балла
Найдено значение P_2' . . . . 2 балла

Задача 9.5. Физика за завтраком.

Как известно, сытое брюхо к ученью глухо. Молодой горный тролль Кирпич спешно (со скоростью $v = 1$ кг/мин) поглощает свой лавовый завтрак температурой $t_л = 1200\,^\circ$C и одновременно решает домашнее задание по физике. Через какое время он потеряет способность решать задачи? Сколько задач он успеет решить к этому моменту? Обычная температура тролля равна $0\,^\circ$C, масса Кирпича составляет 380 кг, а его удельная теплоёмкость совпадает с удельной теплоёмкостью лавы. Считать, что тепловое равновесие в организме тролля устанавливается достаточно быстро.

Согласно исследованиям британских учёных, скорость мыслительных процессов W у горных троллей зависит от температуры тела по закону $W = W_0\dfrac{1 - t/t_0}{1 - t/t_л}$, где $W_0 = 1$ задача в минуту, t — температура тролля в градусах Цельсия, а $t_0 = 60\,^\circ$C.

Ответ: 20 мин, 10 задач.

Решение: За время τ тролль съедает лаву массой $v\tau$. Запишем уравнение теплового баланса в организме Кирпича (c — удельная теплоёмкость лавы и тролля, M и t — масса и температура Кирпича)

$$cv\tau(t_л - t) = cM(t - 0\,^\circ\mathrm{C}) \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v\tau t_л}{M + v\tau}.$$

Из формулы, указанной в условии, следует, что Кирпич перестанет решать задачи, когда его тело прогреется до температуры $t_0 = 60\,^\circ\mathrm{C}$. Подставляя эту температуру в уравнение теплового баланса, находим время, в течение которого тролль ещё способен решать

$$\tau_0 = \frac{Mt_0}{v(t_л - t_0)} = \frac{380\text{ кг} \cdot 60\,^\circ\mathrm{C}}{1\text{ кг/мин} \cdot 1140\,^\circ\mathrm{C}} = 20\text{ мин}.$$

Чтобы рассчитать количество задач, которое успеет решить Кирпич, найдём зависимость скорости мыслительных процессов от времени:

$$W = W_0\frac{1 - t/t_0}{1 - t/t_л} = W_0\frac{M + v\tau - v\tau t_л/t_0}{M} = W_0\left(1 - \frac{v\tau}{M}\left(\frac{t_л}{t_0} - 1\right)\right) = W_0\left(1 - \frac{\tau}{\tau_0}\right).$$

Из полученной формулы видно, что эти процессы протекают **равнозамедленно** с ускорением, равным по модулю $a = W_0/\tau_0$. Таким образом, количество решённых задач N можно рассчитать по формуле для пути, пройденного телом, движущимся равнозамедленно:

$$N = W_0\tau_0 - \frac{a\tau_0^2}{2} = \frac{W_0\tau_0}{2} = \frac{1\,\frac{\text{задача}}{\text{мин}} \cdot 20\text{ мин}}{2} = 10\text{ мин}.$$

Критерии:

Составлено уравнение теплового баланса . . . . 2 балла
Найдена температура, при которой тролль перестаёт решать . . . . 1 балл
Найдена время нагревания тролля до этой температуры . . . . 2 балла
Записан закон, дающий зависимость W от времени . . . . 2 балла
Найдено количество решённых задач . . . . 3 балла

Максимально возможный балл в 9 классе 50

10 класс

Задача 10.1. Движение с трением.
Телу, лежащему на горизонтальной поверхности, сообщили скорость $v = 5$ м/с, направленную вдоль этой поверхности. Найти возможные значения коэффициента трения тела о поверхность, если путь, пройденный телом за время $t = 4$ с после начала движения, составил $s = 5$ м. Ускорение свободного падения равно 10 м/с^2.

Ответ: 3/16 или 1/4.

Решение: Пусть μ — коэффициент трения между телом и поверхностью. Запишем 2-й закон Ньютона в проекции на горизонтальную ось и найдём ускорение a, с которым движется тело до остановки:

$$ma_x = -F_{\text{тр}} \quad \Rightarrow \quad ma_x = -\mu mg \quad \Rightarrow \quad a_x = -\mu g.$$

Рассмотрим два случая: 1) тело через 4 с после начала движения ещё продолжает своё движение; 2) за 4 с после начала движения тело успело остановиться.
В первом случае

$$s = vt - \frac{\mu g t^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{2(vt - s)}{gt^2} = \frac{3}{16} \approx 0{,}19.$$

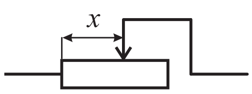
Во втором случае

$$0^2 - v^2 = -2\mu g s \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{v^2}{2gs} = \frac{1}{4} = 0{,}25.$$

Критерии:

Найдено ускорение тела . . . . 2 балла
Рассмотрен первый случай . . . . 3 балла
Рассмотрен второй случай . . . . 3 балла
Найдено числовое значение μ . . . . 1 балл за каждый случай

Задача 10.2. Реостат.



На рис. 10.1 приведён график зависимости сопротивления R реостата, обмотка которого состоит из двух последовательно соединённых проволок одинакового поперечного сечения, от положения его ползунка x. Каково отношение удельных сопротивлений этих проволок?

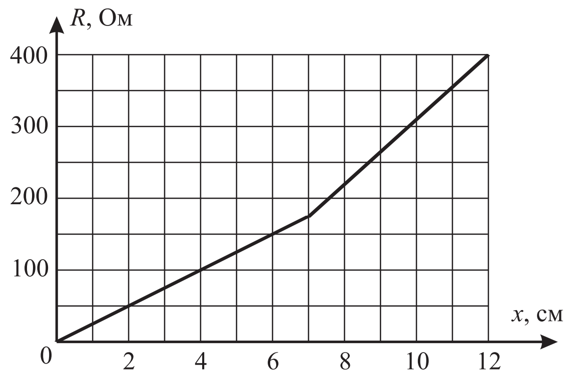


Рис. 10.1.

Ответ: $\rho_2/\rho_1 = 1{,}8$.

Решение: Пусть S — площадь сечения проводников, ρ_1 и ρ_2 — их удельные сопротивления, а l_1 и l_2 — их длины. Запишем формулы для сопротивления проводников и выразим из них отношение ρ_2/ρ_1

$$\begin{cases} R_1 = \rho_1 l_1/S, \\ R_2 = \rho_2 l_2/S \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} \rho_1 = R_1 S/l_1, \\ \rho_2 = R_2 S/l_2 \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{R_2 l_1}{R_1 l_2}.$$

По графику определяем, что $R_1 = 175$ Ом, $R_2 = 225$ Ом, $l_1 = 7$ см, $l_2 = 5$ см. Следовательно,

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{225\text{ Ом} \cdot 7\text{ см}}{175\text{ Ом} \cdot 5\text{ см}} = 1{,}8.$$

Критерии:

Найдена формула для ρ_2/ρ_1 . . . . 3 балла
Определены l_1 и l_2 . . . . 2 балла
Определены R_1 и R_2 . . . . 3 балла
Найдено значение ρ_2/ρ_1 . . . . 2 балла

Задача 10.3. Хулиган на стройке.

Волк, гуляя по стройплощадке, заметил Зайца, садящегося в открытый лифт, находящийся на высоте H от земли. Из хулиганских побуждений Волк кинул в Зайца снежок с начальной скоростью v, целясь при этом точно в него (см. рис. 10.2). Одновременно с броском, лифт начал опускаться вниз с постоянной скоростью u. На каком расстоянии L от лифта находился Волк в момент броска, если снежок всё-таки попал в Зайца? Считать, что лифт в момент попадания ещё не остановился. Сопротивлением воздуха пренебречь.

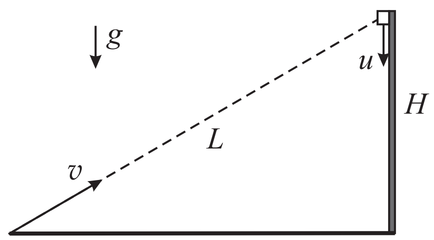


Рис. 10.2.

Ответ: $L = 2uv/g$.

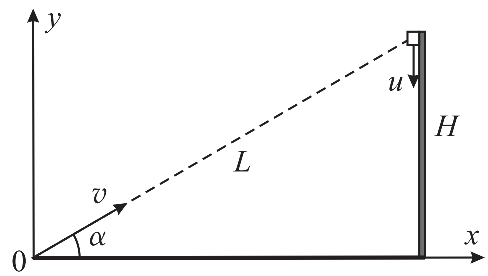


Рис. 10.3.

Решение: Пусть α — угол, под которым Волк кинул снежок (см. рис. 10.3). Из рисунка следует, что $\sin\alpha = H/L$. Запишем уравнения движения снежка и лифта:

$$\text{Снежок:} \qquad x_1 = v\cos\alpha t, \quad y_1 = v\sin\alpha t - \frac{gt^2}{2},$$

$$\text{Лифт:} \qquad x_2 = L\cos\alpha, \quad y_2 = H - ut = L\sin\alpha - ut.$$

Снежок попадает в Зайца, если $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. Отсюда получаем, что

$$v\cos\alpha t = L\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad t = \frac{L}{v},$$

$$v\sin\alpha t - \frac{gt^2}{2} = L\sin\alpha - ut \quad \Rightarrow \quad L\sin\alpha - \frac{gL^2}{2v^2} = L\sin\alpha - \frac{uL}{v} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{2uv}{g}.$$

Критерии:

Записан закон движения лифта . . . . 2 балла
Записан закон движения снежка . . . . 2 балла
Записана связь между H, L и α . . . . 1 балл
Найдено время полёта снежка . . . . 2 балла
Найдено выражение для L . . . . 3 балла

Задача 10.4. Теплоёмкость камня.

У десятиклассника Пети есть мензурка, частично заполненая водой при температуре 50 ℃ (рис. 10.4а). В неё мальчик быстро, но аккуратно, полностью погрузил подвешенный на ниточке нагретый камень. Дождавшись теплового равновесия, Петя вынул камень. В мензурке при этом осталась вода при температуре 60 ℃ (рис. 10.4б). Чему равна удельная теплоёмкость камня, если его плотность — 2500 кг/м^3, а начальная температура составляла 80 ℃? Теплоёмкостью мензурки и теплообменом с окружающей средой пренебречь. Плотность воды — 1000 кг/м^3, её удельная теплоёмкость — 4200 Дж/(кг · ℃).

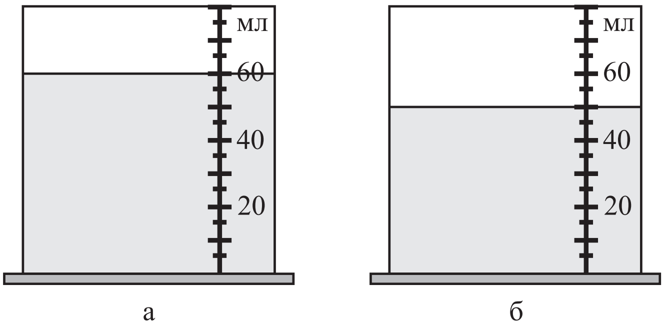


Рис. 10.4.

Ответ: 1400 Дж/(кг · ℃).

Решение: Пусть c — искомая удельная теплоёмкость камня, $c_в$ — удельная теплоёмкость воды. Чтобы рассчитать её, вначале найдём массу камня.
Из представленных в условии рисунков видно, что при полном погружении камня вылилось 10 мл воды. Это значит, что объём камня равен (80 мл − 60 мл) + 10 мл = 30 мл = 30 см^3. Масса камня $m_к$ = = 2,5 г/см^3 · 30 см^3 = 75 г. Масса оставшейся воды $m_в$ = 1 г/см^3 · 50 см^3 = 50 г.
Запишем теперь уравнение теплового баланса:

$$c_в m_в(60℃ - 50℃) = c m_к(80℃ - 60℃) \quad \Rightarrow \quad c = \frac{c_в \cdot 50\text{ г} \cdot (60℃ - 50℃)}{75\text{ г} \cdot (80℃ - 60℃)} = \frac{c_в}{3} = 1400\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ℃}.$$

Критерии:

Найден объём камня . . . . 2 балла
Найдена масса камня . . . . 1 балл
Записано уравнение теплового баланса . . . . 4 балла
Найдено значение теплоёмкости камня . . . . 3 балла

Задача 10.5. Растущая тень.

Точечный источник света, находящийся на высоте h от пола, освещает лежащий на полу шар диаметром d = 0,5 м. Если источник опустить до высоты $h/2$, площадь тени, отбрасываемой шаром, увеличится в 3 раза. Найти начальную высоту h. Источник света и центр шара в обоих случаях лежат на одной вертикали.

Ответ: 1,25 м.

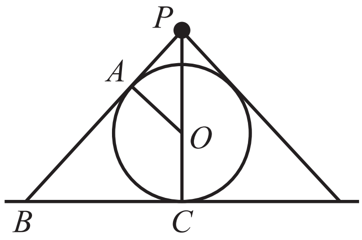


Рис. 10.5.

Решение: Сделаем следующее построение (рис. 10.5). Здесь P — источник света, O — центр шара, $AO = OC = d/2$ — его радиус, BC — радиус тени. Из подобия треугольников APO и BPC имеем

$$\frac{AO}{PA} = \frac{BC}{PC} \quad \Rightarrow \quad BC = \frac{AO \cdot PC}{PA} = \frac{d/2 \cdot h}{\sqrt{(h - d/2)^2 - (d/2)^2}} = \frac{d\sqrt{h}}{2\sqrt{h-d}}.$$

Отсюда найдём площадь тени

$$S = \pi BC^2 = \frac{\pi d^2 h}{4(h-d)}.$$

Если источник опустить до высоты $h/2$, площадь тени увеличится в 3 раза:

$$3S = \frac{\pi d^2 h/2}{4(h/2 - d)} = \frac{\pi d^2 h}{4(h - 2d)}.$$

Подставляя сюда выражение для S, получаем

$$\frac{3\pi d^2 h}{4(h-d)} = \frac{\pi d^2 h}{4(h-2d)} \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{h-d} = \frac{1}{h-2d} \quad \Rightarrow \quad h = 2{,}5d = 1{,}25 \text{ м}.$$

Критерии:

Сделано построение . . . . 2 балла
Получена формула для радиуса и/или площади тени . . . . 4 балла
Записано условие связи между h и d . . . . 3 балла
Найдено значение h . . . . 1 балл

Максимально возможный балл в 10 классе 50

11 класс

Задача 11.1. Разлёт зарядов.

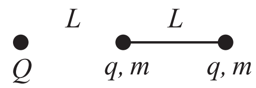
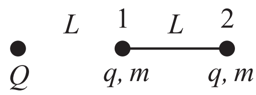


Рис. 11.1.

Вдоль одной прямой удерживаются три положительных электрических заряда, два из которых скреплены между собой невесомой нитью (рис. 11.1). Величины зарядов, их массы и расстояния между ними указаны на рисунке. Систему отпускают. При какой величине заряда Q два оставшихся заряда начнут движение с различным ускорением? Нить считать непроводящей и нерастяжимой.

Ответ: $Q > 8q/3$.



Решение: Так как нить нерастяжима, заряды, связанные ей, могут двигаться с разными ускорениями только, если ускорение левого заряда a_1 больше ускорения правого a_2. В этом случае сила натяжения нити равна нулю. Запишем 2-й закон Ньютона для каждого заряда q:

$$ma_1 = \frac{kqQ}{L^2} - \frac{kq^2}{L^2}, \quad ma_2 = \frac{kqQ}{4L^2} + \frac{kq^2}{L^2}.$$

Так как $a_1 > a_2$, получаем, что

$$\frac{kqQ}{L^2} - \frac{kq^2}{L^2} > \frac{kqQ}{4L^2} + \frac{kq^2}{L^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{3kqQ}{4L^2} > \frac{2kq^2}{L^2} \quad \Rightarrow \quad Q > \frac{8q}{3}.$$

Критерии:

Обосновано, что $a_1 > a_2$ . . . . 2 балла
Обосновано, что натяжение нити равно нулю . . . . 1 балл
Записан 2-й закон Ньютона для обоих зарядов . . . . 4 балла
Получено неравенство $Q > 8q/3$ . . . . 3 балла

Задача 11.2. Из жизни электрических рыб.

Некоторые рыбы имеют электрические органы, состоящие из видоизменённых мышечных клеток. Каждую такую клетку можно считать источником напряжения. У электрического ската эти клетки сгруппированы в 600 параллельных рядов из 400 последовательно соединённых клеток. При этом электрический скат в морской воде создаёт ток $I_1 = 50$ А. Каким образом нужно переподключить такое же количество электрических клеток в теле электрического угря, обитающего в речной воде, чтобы он мог создавать ток $I_2 = 1$ А? Считайте, что полюса электрических органов у ската и угря расположены на одинаковом расстоянии, а удельное сопротивление морской воды в 1000 раз меньше, чем речной. Внутренним сопротивлением клеток пренебречь.

Ответ: 30 рядов по 8000 клеток.

Решение: Каждую клетку можно считать источником с ЭДС, равным $\mathscr{E}$. Так как в организме ската один ряд содержит 400 клеток, то суммарная ЭДС такого ряда составляет $400\mathscr{E}$. Заметим, что итоговая ЭДС, вырабатываемая организмом ската, равна также $400\mathscr{E}$ и не зависит от количества рядов. Тем не менее, важно то, что количество клеток в каждом ряду должно быть одинаковым.

Пусть R — сопротивление области морской воды между полюсами органов ската. Тогда $400\mathscr{E} = I_1 R$. Сопротивление такой же области речной воды в 1000 раз больше, т.е. $1000R$. В этом случае $N\mathscr{E} = 1000 I_2 R$, где N — количество клеток в одном ряду в организме угря. Отсюда получаем, что

$$\frac{N}{400} = \frac{1000 I_2}{I_1} \quad \Rightarrow \quad N = 8000.$$

Так как всего клеток должно быть $600 \times 400 = 240000$ штук, у угря они собраны в $240000/8000 = 30$ рядов.

Критерии:

Найдена общая ЭДС ската . . . . 2 балла
Обосновано, что у угря количество клеток в каждом ряду одинаковое . . . . 1 балл
Записан закон Ома для тока в морской воде . . . . 2 балла
Записан закон Ома для тока в речной воде . . . . 2 балла
Найдено количество клеток в одном ряду у угря . . . . 2 балл
Найдено количество рядов у угря . . . . 1 балл

Задача 11.3. Вверх-вниз.

На наклонной плоскости с углом наклона α ($\operatorname{tg}\alpha = 1/3$) удерживается небольшой брусок (см. рис. 11.2). В некоторый момент брусок отпускают, и он движется вниз до тех пор, пока не достигает стенки, перпендикулярной плоскости. Затем он упруго ударяется о неё и поднимается вверх. На какое максимальное расстояние от стенки уедет брусок после соударения? Коэффициент трения между бруском и плоскостью $\mu = 1/5$, начальное расстояние от бруска до стенки $L = 30$ см.

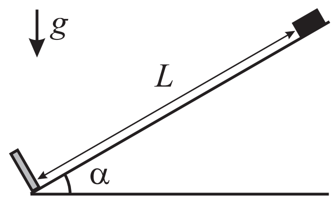


Рис. 11.2.

Ответ: 7,5 см.

Решение: Пусть L' — максимальное расстояние вдоль плоскости, на которое сможет уехать брусок после столкновения со стенкой, m — масса бруска. Начальная потенциальная энергия бруска равна $E_1 = mgL\sin\alpha$, конечная — $E_2 = mgL'\sin\alpha$. Уменьшение потенциальной энергии равно работе силы трения

$$E_2 - E_1 = A_{\text{тр}} = -\mu N(L + L').$$

Так как сила реакции опоры равна $N = mg\cos\alpha$, получаем

$$mg(L'-L)\sin\alpha = -\mu mg\cos\alpha(L+L') \quad \Rightarrow \quad (L'-L)\operatorname{tg}\alpha = -\mu(L+L') \quad \Rightarrow \quad L' = L\cdot\frac{\operatorname{tg}\alpha - \mu}{\mu + \operatorname{tg}\alpha} = 7{,}5 \text{ см}.$$

Критерии:

Найдена начальная и конечная потенциальная энергия бруска . . . . 2 балла
Найдено выражение для силы трения . . . . 2 балла
Найдена работа силы трения . . . . 2 балла
Записана связь между энергией бруска и работой силы трения . . . . 2 балла
Получен ответ . . . . 2 балла

Задача 11.4. Подъёмное устройство.

Учёный Иннокентий Иванов сконструировал подъёмное устройство (рис. 11.3), представляющее собой цилиндрический сосуд, заполненный идеальным одноатомным газом и закрытый лёгким поршнем, на который кладут груз. Для поднятия груза газ подогревают с помощью электрического нагревателя. Оказалось, что при напряжении в цепи нагревателя, равном $U = 10$ В, груз массой $m = 400$ г поднимается на высоту $H = 10$ см за $t = 4$ с. Найти силу тока в цепи нагревателя. Считать, что стенки сосуда и поршень тепло не проводят. Трением поршня о стенки сосуда пренебречь. Ускорение свободного падения равно 10 м/с^2.

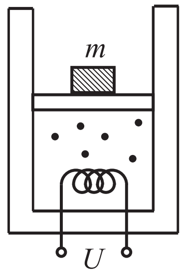


Рис. 11.3.

Ответ: 25 мА.

Решение: Пусть I — ток в цепи нагревателя, ν — количество вещества, находящегося под поршнем. По 1-му началу термодинамики

$$UIt = \frac{3}{2}\nu R\Delta T + A = \frac{3}{2}\nu R\Delta T + p\Delta V,$$

где A — работа газа, p — давление газа в сосуде, ΔT — изменение температуры газа, а ΔV — изменение его объёма. Из приведённых числовых данных следует, что кинетической энергией груза можно пренебречь по сравнению с изменением его потенциальной энергии. Следовательно, $A = mgH$. Давление газа в сосуде во время подъёма груза практически постоянно, т.е. газ в сосуде расширяется изобарно. Из уравнения Менделеева-Клапейрона получаем $\nu R\Delta T = p\Delta V = A$. Отсюда

$$UIt = \frac{5A}{2} = \frac{5mgH}{2} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{5mgH}{2Ut} = \frac{5 \cdot 0{,}4\ \text{кг} \cdot 10\ \text{м/с}^2 \cdot 0{,}1\ \text{м}}{2 \cdot 10\ \text{В} \cdot 4\ \text{с}} = 0{,}025\ A.$$

Критерии:

Найдена теплота, отданная нагревателем . . . . 1 балл
Найдена работа газа A . . . . 2 балла
Записано 1-ое начало термодинамики . . . . 2 балла
Получена формула $Q = 5A/2$ . . . . 3 балла
Найдена сила тока . . . . 2 балла

Задача 11.5. Вращающаяся система.

Система, изображённая на рис. 11.4 состоит из двух шариков массы m, подвешенных на невесомых нитях длины L и соединённых пружиной жёсткости k. Пружина в нерастянутом состоянии имеет длину L. С какой угловой скоростью ω необходимо вращать систему вокруг вертикальной оси, проходящей через точку подвеса, чтобы нити образовывали прямой угол?

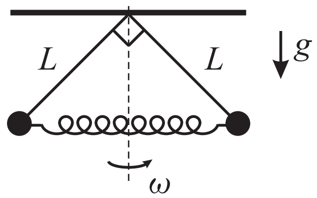


Рис. 11.4.

Ответ: $\omega = \sqrt{\sqrt{2}g/L + k(2 - \sqrt{2})/m}.$

Решение: Перейдём в систему отсчёта, вращающуюся вместе с шариками. Рассмотрим силы, действующие на один из шариков (см. рис. 11.5). Здесь $F_{\text{ц.б.}} = m\omega^2 L/\sqrt{2}$ — центробежная сила инерции, $F_{\text{т}} = mg$ — сила тяжести, T — сила натяжения нити, $F_{\text{упр}} = k(\sqrt{2} - 1)L$ — сила упругости пружины.

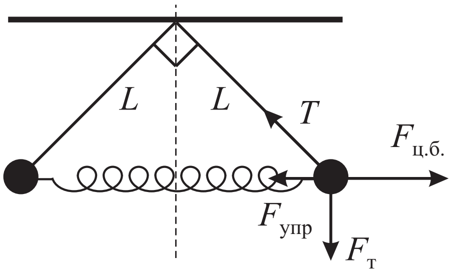


Рис. 11.5.

Так как система находится в равновесии, векторная сумма этих сил должна равняться нулю. Запишем это условие в проекции на горизонтальную и вертикальную ось:

$$\begin{cases} 0 = F_{ц.б.} - T\cos 45^\circ - F_{упр}, \\ 0 = T\sin 45^\circ - mg \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 0 = \dfrac{m\omega^2 L}{\sqrt{2}} - \dfrac{T}{\sqrt{2}} - k(\sqrt{2}-1)L, \\ 0 = \dfrac{T}{\sqrt{2}} - mg. \end{cases}$$

Выражаем из второго равенства T и подставляем в первое:

$$0 = \frac{m\omega^2 L}{\sqrt{2}} - mg - k(\sqrt{2}-1)L \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{\sqrt{2}g}{L} + \frac{k(2-\sqrt{2})}{m}}.$$

Критерии:

Найдено выражение для $F_{ц.б.}$ или центростремительного ускорения . . . . 2 балла
Найдено выражение для $F_{упр}$ . . . . 2 балла
Записано условие равновесия . . . . 4 балла
Найдено выражение для ω . . . . 2 балла

Максимально возможный балл в 11 классе 50