8 класс

1. На рисунке 1 изображено числовое колесо. В кружочки поставьте первые девять нечётных простых чисел так, чтобы сумма любых трёх чисел, расположенных по диаметру, была простым числом.

а) Может ли при этом в центре колеса стоять цифра 5?

б) Может ли при этом в центре колеса стоять цифра 3?

2. Даны действительные числа a, b, c, причём $a > b > c$. Верно ли, что

$$a^2b + b^2c + c^2a > b^2a + a^2c + c^2b\,?$$

3. За круглым столом сидят 100 человек, каждый из которых или рыцарь, который всегда говорит правду, или лжец, который всегда лжёт. Каждый из них утверждает: «Мои соседи — лжец и рыцарь». Сколько лжецов сидит за столом?

4. *а*) Можно ли в таблице размером 6×6 расставить 36 целых чисел так, чтобы сумма четырёх чисел в каждом квадрате 2×2 была отрицательной, а сумма всех 36 чисел — положительной?

б) Можно ли в таблице размером 5×5 расставить 25 целых чисел так, чтобы сумма чисел в каждом квадрате 2×2 была отрицательной, а сумма всех 25 чисел — положительной?

5. В треугольнике ABC углы A и B равны 30° и 45° соответственно. На биссектрисе угла A вне треугольника ABC отметили точку M такую, что $\angle MBC = 90^\circ$. Найдите угол MCB.

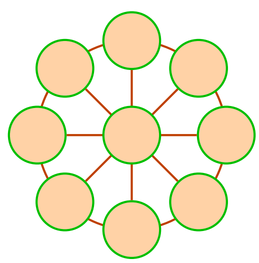

Рис. 1

Продолжительность олимпиады — **4 часа**.
Максимальное число баллов за задачу — **7 баллов**.
Максимальное число баллов за все задачи — **35 баллов**.

9 класс

1. При каком наибольшем натуральном n число $n^3 + 2024$ делится на $n + 1$?

2. Известно, что числа a, b, c отрицательные и $a < b < c$. Расставьте числа $x = (a+b)(b+c)$, $y = (b + c)(c + a)$, $z = (c + a)(a + b)$ в порядке возрастания. Укажите все возможные случаи.

3. Коэффициенты уравнений $x^2 + p_1x + q_1 = 0$ и $x^2 + p_2x + q_2 = 0$ удовлетворяют условию: $p_1p_2 > 2(q_1 + q_2)$. Докажите, что хотя бы одно из уравнений имеет два различных действительных корня.

4. В некотором государстве было решено построить 20 новых городов на 9 необитаемых островах так, чтобы на каждом острове был хотя бы один город. Между любой парой новых городов, находящихся на *разных* островах, планируется установить прямое паромное сообщение. Определите наименьшее возможное количество таких паромных сообщений.

5. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Луч O_1A пересекает окружность ω_2 вторично в точке M, а луч O_2A пересекает ω_1 вторично в точке N. Прямая MN вторично пересекает эти окружности в точках E и F соответственно. Найдите отношение $AE : AF$.

Продолжительность олимпиады — **4 часа**.
Максимальное число баллов за задачу — **7 баллов**.
Максимальное число баллов за все задачи — **35 баллов**.

10 класс

1. Четыре последовательных натуральных числа разбиты на две группы по 2 числа. Известно, что произведение чисел одной группы на 2023 меньше, чем произведение чисел другой группы. Найдите эти числа.

2. Даны различные действительные числа a и b. Верно ли, что хотя бы одно из уравнений $(x+a)(x+b) = x-a$, $(x-a)(x-b) = x+b$ имеет решение?

3. В некотором государстве было решено построить 20 новых городов на 11 необитаемых островах так, чтобы на каждом острове был хотя бы один город. Между любой парой новых городов, находящихся на *разных* островах, планируется установить прямое паромное сообщение. Определите наименьшее возможное количество таких паромных сообщений.

4. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Луч O_1A пересекает окружность ω_2 вторично в точке M, а луч O_2A пересекает ω_1 вторично в точке N. Прямая MN вторично пересекает эти окружности в точках E и F соответственно. Найдите отношение $AE : AF$.

5. Положительные числа a, b и c таковы, что $a^2+b^2+c^2 = 3$. Докажите, что

$$\frac{1}{2+ab} + \frac{1}{2+bc} + \frac{1}{2+ca} \geqslant 1.$$

Продолжительность олимпиады — **4 часа**.
Максимальное число баллов за задачу — **7 баллов**.
Максимальное число баллов за все задачи — **35 баллов**.

11 класс

1. Четыре последовательных натуральных числа разбиты на две группы по 2 числа. Известно, что произведение чисел одной группы на 2023 больше, чем произведение чисел другой группы. Найдите эти числа.

2. При каком наибольшем натуральном n число $n^8 + n^6 + n^4 + n^2 + 100$ делится на $n + 1$?

3. В некотором государстве было решено построить 30 новых городов на 20 необитаемых островах так, чтобы на каждом острове был хотя бы один город. Между любой парой новых городов, находящихся на *разных* островах, планируется установить прямое паромное сообщение. Определите наименьшее возможное количество таких паромных сообщений.

4. Докажите, что если $(a + c)(a + b + c) < 0$, то

$$(b - c)^2 > 4a(a + b + c).$$

5. В прямоугольном треугольнике ABC точка O — середина гипотенузы AB, угол A равен $60°$. Окружность ω касается гипотенузы AB в точке O и проходит через точку C. Описанная окружность треугольника ABC и катет BC пересекают окружность ω соответственно в точках M и N, отличных от C. Найдите угол между прямыми MN и AB.

Продолжительность олимпиады — **4 часа**.
Максимальное число баллов за задачу — **7 баллов**.
Максимальное число баллов за все задачи — **35 баллов**.