§ 20
Преобразование логических выражений

Способ определения истинности логического выражения путём построения его таблицы истинности становится неудобным при увеличении количества логических переменных, т. к. за счёт существенного увеличения числа строк таблицы становятся громоздкими. В таких случаях выполняются преобразования логических выражений в равносильные. Для этого используют свойства логических операций, которые иначе называют законами алгебры логики.

20.1. Основные законы алгебры логики

Приведём основные законы алгебры логики.

1. Переместительные (коммутативные) законы:
   $A \,\&\, B = B \,\&\, A$;
   $A \vee B = B \vee A$.
2. Сочетательные (ассоциативные) законы:
   $(A \,\&\, B) \,\&\, C = A \,\&\, (B \,\&\, C)$;
   $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$.
3. Распределительные (дистрибутивные) законы:
   $A \,\&\, (B \vee C) = (A \,\&\, B) \vee (A \,\&\, C)$;
   $A \vee (B \,\&\, C) = (A \vee B) \,\&\, (A \vee C)$.
4. Законы идемпотентности (отсутствия степеней и коэффициентов):
   $A \,\&\, A = A$;
   $A \vee A = A$.
5. Закон противоречия:
   $A \,\&\, \overline{A} = 0$.
6. Закон исключённого третьего:
   $A \vee \overline{A} = 1$.
7. Закон двойного отрицания:
   $\overline{\overline{A}} = A$.
8. Законы работы с константами:
   $A \vee 1 = 1$; $A \vee 0 = A$;
   $A \,\&\, 1 = A$; $A \,\&\, 0 = 0$.
9. Законы де Моргана:
   $\overline{A \,\&\, B} = \overline{A} \vee \overline{B}$;
   $\overline{A \vee B} = \overline{A} \,\&\, \overline{B}$.
10. Законы поглощения:
    $A \,\&\, (A \vee B) = A$;
    $A \vee (A \,\&\, B) = A$.

Справедливость законов можно доказать построением таблиц истинности.

Пример 1. Упростим логическое выражение
$A \,\&\, B \,\&\, C \vee A \,\&\, B \,\&\, \overline{C}$.

Последовательно применим дистрибутивный закон и закон исключённого третьего:

$$A \,\&\, B \,\&\, C \vee A \,\&\, B \,\&\, \overline{C} = A \,\&\, B \,\&\, (C \vee \overline{C}) = A \,\&\, B \,\&\, 1 = A \,\&\, B.$$

Пример 2. Упростим логическое выражение
$(A \vee B)\ \&\ (A \vee B \vee C)\ \&\ (A \vee B \vee \overline{C})$.

$$(A \vee B)\ \&\ (A \vee B \vee C)\ \&\ (A \vee B \vee \overline{C}) = (A \vee B)\ \&\ (0 \vee C \vee \overline{C}) =$$
$$= (A \vee B)\ \&\ 1 = A \vee B.$$

Аналогичные законы выполняются для операций объединения, пересечения и дополнения множеств. Например:

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Пробуйте самостоятельно доказать один из этих законов с помощью кругов Эйлера.

Пример 3. На числовой прямой даны отрезки $B = [2;\ 12]$ и $C = [7;\ 18]$. Каким должен быть отрезок A, чтобы предикат $(x \in A) \vee ((x \in B) \to (x \in C))$ становился истинным высказыванием при любых значениях x.

Преобразуем исходное выражение, избавившись от импликации:

$$(x \in A) \vee ((x \in B) \to (x \in C)) = (x \in A) \vee ((\overline{x \in B}) \vee (x \in C)) =$$
$$= (x \in A) \vee (\overline{x \in B}) \vee (x \in C).$$

A, B и C — множества. Для них можем записать:

$A \cup \overline{B} \cup C = U$.

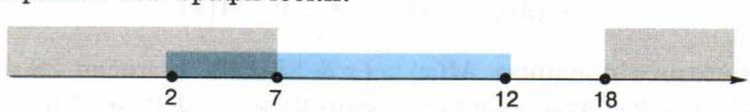
Известно, что $A \cup \overline{A} = U$.

Будем считать, что $\overline{A} = \overline{B} \cup C$. Тогда $A = \overline{\overline{B} \cup C} = B \cap \overline{C}$, причём это минимально возможное множество A.

Множество B — это отрезок $[2;\ 12]$.

Множество $\overline{C}$ — это промежутки $]-\infty;\ 7[$ и $]18;\ +\infty[$.

Изобразим это графически:



Пересечением этих множеств будет служить промежуток $[2;\ 7[$. В качестве ответа мы можем взять этот промежуток, а также любой другой, его включающий.

Чему равна минимальная длина отрезка A? Укажите ещё несколько вариантов множества A.

Пример 4. Для какого наименьшего неотрицательного целого десятичного числа a выражение

$$(x \,\&\, 28 \neq 0 \vee x \,\&\, 45 \neq 0) \to (x \,\&\, 17 = 0 \to x \,\&\, a \neq 0)$$

тождественно истинно (т. е. принимает значение 1 при любом неотрицательном целом значении десятичной переменной x)? Здесь & — поразрядная конъюнкция двух неотрицательных целых десятичных чисел.

Прежде всего, вспомним, что представляет собой поразрядная конъюнкция двух целых десятичных чисел, например 27 и 22.

$27 = 11011_2$, $22 = 10110_2$.
$27 \,\&\, 22 = 11011 \,\&\, 10110 = 10010_2 = 18_{10}$.

$$\begin{array}{r} \& \begin{array}{r} 1\,1\,0\,1\,1 \\ 1\,0\,1\,1\,0 \end{array} \\ \hline 1\,0\,0\,1\,0 \end{array}$$

Обратите внимание на то, что если в некотором бите хотя бы одного сомножителя есть 0, то 0 есть и в этом бите результата, а 1 в результате получается только тогда, когда в соответствующих битах каждого сомножителя есть 1.

Введём обозначения:

$M(x) = (x \,\&\, 28 \neq 0)$, $N(x) = (x \,\&\, 45 \neq 0)$,
$K(x) = (x \,\&\, 17 = 0)$, $A(x) = (x \,\&\, a \neq 0)$.

Перепишем исходное выражение в наших обозначениях:

$$(M(x) \vee N(x)) \to (K(x) \to A(x)).$$

Преобразуем полученное выражение:

$$(M(x) \vee N(x)) \to (K(x) \to A(x)) = \overline{M(x) \vee N(x)} \vee \overline{K(x)} \vee A(x) =$$
$$= \overline{(M(x) \vee N(x)) \& K(x)} \vee A(x).$$

Рассмотрим предикат $M(x) = (x \,\&\, 28 \neq 0)$. В числе $28 = 11100_2$ 4-й, 3-й и 2-й биты содержат единицы, а 1-й и 0-й — нули. Следовательно, множеством истинности этого предиката являются такие числа x, у которых хотя бы один из битов с номерами 4, 3 или 2 содержит единицу. Если и 4-й, и 3-й, и 2-й биты числа x нулевые, то высказывание $x \,\&\, 28 \neq 0$ будет ложным.

Рассмотрим предикат $N(x) = (x \,\&\, 45 \neq 0)$. В числе $45 = 101101_2$ 5-й, 3-й, 2-й и 0-й биты содержат единицы, 4-й и 1-й — нули.

Следовательно, множеством истинности этого предиката являются такие числа x, у которых хотя бы один из битов с номерами 5, 3, 2 или 0 содержит единицу. Если и 5-й, и 3-й, и 2-й, и 0-й биты числа x нулевые, то высказывание $x \mathbin{\&} 45 \neq 0$ будет ложным.

Рассмотрим предикат $K(x) = (x \mathbin{\&} 17 = 0)$. В числе $17 = 10001_2$ 3-й, 2-й и 1-й биты содержат нули, 4-й и 0-й — единицы. Побитовая конъюнкция 17 и x будет равна нулю, если в числе x 4-й и 0-й биты будут содержать нули. Множество истинности этого предиката — все x с нулями в 4-м и 0-м битах.

По условию задачи надо, чтобы $\overline{(M(x) \vee N(x)) \mathbin{\&} K(x)} \vee A(x) = 1$. Запишем это выражение для рассмотренных множеств истинности:

$$\overline{(M \cup N) \cap K} \cup A = U.$$

Так как $A \cup \overline{A} = U$, примем $A = (M \cup N) \cap K$.

Объединением множеств M и N являются все двоичные числа, у которых хотя бы один из битов с номерами 5, 4, 3, 2, 0 содержит единицу. Пересечением этого множества с множеством K будут все двоичные числа, у которых биты с номерами 4 и 0 будут заняты нулями, т. е. такие двоичные числа, у которых хотя бы один из битов с номерами 5, 3, 2 содержит 1. Все эти числа образуют множество A.

Искомое число a должно быть таким, чтобы при любом неотрицательном целом значении переменной x: $x \mathbin{\&} a \neq 0$, и кроме того, оно должно быть минимальным из возможных. Этим условиям удовлетворяет число 101100_2. Действительно, единицы в нём стоят в тех и только в тех битах, которые нужны для выполнения условия $x \mathbin{\&} a \neq 0$.

Итак, требуемое число 101100_2 или 44_{10}.

Приведите пример такого десятичного числа a, что для него $x \mathbin{\&} a \neq 0$ при любом неотрицательном целом значении десятичной переменной x, но само число a не является минимально возможным.

Пример 5. Выясним, сколько решений имеет следующая система из двух уравнений:

$$\begin{cases} (x_1 \to x_2) \mathbin{\&} (x_2 \to x_3) \mathbin{\&} (x_3 \to x_4) = 1; \\ (\bar{y}_1 \vee y_2) \mathbin{\&} (\bar{y}_2 \vee y_3) \mathbin{\&} (\bar{y}_3 \vee y_4) = 1. \end{cases}$$

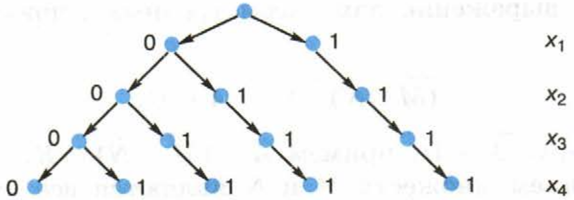
Рассмотрим первое уравнение:
$(x_1 \to x_2) \& (x_2 \to x_3) \& (x_3 \to x_4) = 1.$

Конъюнкция истинна тогда и только тогда, когда истинны все образующие её высказывания. Следовательно, каждая из трёх входящих в конъюнкцию импликаций должна быть равна 1.

Начнем строить дерево решений, представив на нём значения переменных x_1 и x_2 при которых $x_1 \to x_2 = 1$.

Продолжим строить дерево решений. Значения переменной x_3 будем выбирать такими, чтобы при имеющихся x_2 импликация $x_2 \to x_3$ оставалась истинной.

То же самое проделаем для переменной x_4.



На дереве видно, что рассматриваемое нами уравнение имеет 5 решений — 5 разных наборов значений логических переменных x_1, x_2, x_3, x_4, при которых выполняется равенство:

$$(x_1 \to x_2) \& (x_2 \to x_3) \& (x_3 \to x_4) = 1.$$

Так как $a \to b = \bar{a} \vee b$, второе уравнение системы:

$$(\bar{y}_1 \vee y_2) \& (\bar{y}_2 \vee y_3) \& (\bar{y}_3 \vee y_4) = 1$$

можно преобразовать к виду:

$$(y_1 \to y_2) \& (y_2 \to y_3) \& (y_3 \to y_4) = 1.$$

Следовательно, как и первое уравнение, это уравнение имеет 5 решений. Представим их в табличной форме:

y_1	y_2	y_3	y_4
0	0	0	0
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	1	1
1	1	1	1

Решение исходной системы логических уравнений — это множество различных наборов значений логических переменных x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4 таких, что при подстановке каждого из них в систему оба уравнения превращаются в истинные равенства.

Начнём строить такие наборы или двоичные цепочки. Их началом может служить любой из пяти наборов — решений первого уравнения, а концом — любой из пяти наборов — решений второго уравнения. Например, на основе одного из решений первого уравнения можно построить следующие пять решений системы:

x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4
0	0	0	0	0	0	0	0
				0	0	0	1
				0	0	1	1
				0	1	1	1
				1	1	1	1

Всего мы можем построить $5 \cdot 5 = 25$ решений системы.

Вспомните, как называется теорема комбинаторики, которую мы применили для подсчёта количества решений системы.

20.2. Логические функции

Значение любого логического выражения определяется значениями входящих в него логических переменных. Тем самым логическое выражение может рассматриваться как способ задания логической функции.

Совокупность значений n аргументов удобно интерпретировать как строку нулей и единиц длины n. Существует ровно 2^n различных двоичных строк длины n. Так как на каждой такой строке некая функция может принимать значение 0 или 1, общее количество различных булевых функций от n аргументов равно 2^{2^n}.

Для $n = 2$ существует 16 различных логических функций.

Рассмотрим их подробнее.

A	B	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}	F_{16}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

$F_1(A, B) = 0$ — константа «ложь»;
$F_2(A, B) = A \mathbin{\&} B$ — конъюнкция;
$F_3(A, B) = \overline{A \to B}$ — отрицание импликации;
$F_4(A, B) = A$ — функция, равная первому аргументу;
$F_5(A, B) = \overline{B \to A}$ — отрицание обратной импликации;
$F_6(A, B) = B$ — функция, равная второму аргументу;
$F_7(A, B) = A \oplus B$ — строгая дизъюнкция;
$F_8(A, B) = A \vee B$ — дизъюнкция;
$F_9(A, B) = A \downarrow B$ — стрелка Пирса (отрицание дизъюнкции, ИЛИ-НЕ);
$F_{10}(A, B) = A \leftrightarrow B$ — эквиваленция;
$F_{11}(A, B) = \overline{B}$ — отрицание второго аргумента;
$F_{12}(A, B) = B \to A$ — обратная импликация;
$F_{13}(A, B) = \overline{A}$ — отрицание первого аргумента;
$F_{14}(A, B) = A \to B$ — импликация;
$F_{15}(A, B) = A \mid B$ — штрих Шеффера (отрицание конъюнкции, И-НЕ);
$F_{16}(A, B) = 1$ — константа «истина».

С увеличением числа аргументов количество логических функций резко возрастает. Так, для трёх переменных существует 256 различных логических функций! Но изучать их все нет никакой необходимости. Дело в том, что путём преобразований функция любого количества переменных может быть выражена через функции только двух переменных. Более того, можно использовать не все, а лишь некоторые логические функции двух переменных. Например:

1) F_2 и F_{11} (конъюнкция и отрицание второго аргумента);
2) F_8 и F_{13} (дизъюнкция и отрицание первого аргумента);
3) F_9 (стрелка Пирса, отрицание дизъюнкции);
4) F_{15} (штрих Шеффера, отрицание конъюнкции).

Два последних примера говорят о том, что при желании всю алгебру логики можно свести к одной функции! Но чаще всего логические функции записываются в виде логического выражения через отрицание, конъюнкцию и дизъюнкцию.

20.3. Составление логического выражения по таблице истинности и его упрощение

Ранее мы выяснили, что для любого логического выражения можно составить таблицу истинности. Справедливо и обратное: для всякой таблицы истинности можно составить соответствующее ей логическое выражение.

Алгоритм составления логического выражения по таблице истинности достаточно прост. Для этого надо:

1) отметить в таблице истинности наборы переменных, при которых значение логического выражения равно единице;
2) для каждого отмеченного набора записать конъюнкцию всех переменных следующим образом: если значение некоторой переменной в этом наборе равно 1, то в конъюнкцию включаем саму переменную, в противном случае — её отрицание;
3) все полученные конъюнкции связать операциями дизъюнкции.

Пример 6. Имеется следующая таблица истинности:

A	*B*	*C*	*F*
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

После выполнения двух первых шагов алгоритма получим:

A	B	C	F	
0	1	0	1	$\overline{A}\ \&\ B\ \&\ \overline{C}$
0	1	1	1	$\overline{A}\ \&\ B\ \&\ C$
1	1	0	1	$A\ \&\ B\ \&\ \overline{C}$

После выполнения третьего шага получаем логическое выражение:

$$\overline{A}\ \&\ B\ \&\ \overline{C} \vee \overline{A}\ \&\ B\ \&\ C \vee A\ \&\ B\ \&\ \overline{C}.$$

Попробуем упростить полученное логическое выражение. Прежде всего, вынесем за скобки B — общий сомножитель, имеющийся у всех трёх слагаемых, затем — сомножитель $\overline{A}$, а далее используем законы алгебры логики.

$$\overline{A}\ \&\ B\ \&\ \overline{C} \vee \overline{A}\ \&\ B\ \&\ C \vee A\ \&\ B\ \&\ \overline{C} =$$
$$= B\ \&\ (\overline{A}\ \&\ \overline{C} \vee \overline{A}\ \&\ C \vee A\ \&\ \overline{C}) =$$
$$= B\ \&\ (\overline{A}\ \&\ (\overline{C} \vee C) \vee A\ \&\ \overline{C}) = B\ \&\ (\overline{A}\ \&\ 1 \vee A\ \&\ \overline{C}) =$$
$$= B\ \&\ (\overline{A} \vee A\ \&\ \overline{C}) = B\ \&\ (\overline{A} \vee A)\ \&\ (\overline{A} \vee \overline{C}) =$$
$$= B\ \&\ 1\ \&\ (\overline{A} \vee \overline{C}) = B\ \&\ (\overline{A} \vee \overline{C}) = B\ \&\ \overline{A\ \&\ C}.$$

САМОЕ ГЛАВНОЕ

Способ определения истинности логического выражения путём построения его таблицы истинности становится неудобным при увеличении количества логических переменных, т. к. за счёт существенного увеличения числа строк таблицы становятся громоздкими. В таких случаях выполняются преобразования логических выражений в равносильные. Для этого используют свойства логических операций, которые иначе называют законами алгебры логики. Аналогичные законы имеют место и в алгебре множеств.

Логическая функция может быть задана с помощью таблицы истинности или аналитически, т. е. с помощью логического выражения.

Для всякой таблицы истинности можно составить соответствующее ей логическое выражение.

Вопросы и задания

1. Какие из рассмотренных законов алгебры логики аналогичны законам алгебры чисел, а какие нет?
2. Докажите второй закон де Моргана с помощью таблиц истинности.
3. Путём преобразования докажите равносильность следующих высказываний:

   1) $\overline{(A \& \overline{B}) \vee (B \& \overline{C})}$ и $(\overline{A} \& \overline{B}) \vee (\overline{A} \& C) \vee (B \& C)$;

   2) $(A \& B) \vee \overline{(A \& \overline{C})}$ и $(A \& B) \vee A \vee \overline{C}$.
4. Упростите логические формулы:

   1) $(A \& B \& \overline{C}) \vee (A \& B \& C) \vee (A \& B)$;

   2) $(A \& B \vee A \& B \& \overline{C} \vee B \& \overline{C} \vee C) \& (\overline{C} \vee A \& C \vee \overline{A} \& B \& \overline{C})$.

*5. Найдите X, если $\overline{(X \vee A)} \vee \overline{(X \vee \overline{A})} = B$.

6. На числовой прямой даны два отрезка: $P = [10;\ 25]$ и $Q = [20;\ 55]$. Укажите наибольшую возможную длину такого отрезка A, что выражение $(x \in A) \to ((x \in P) \vee (x \in Q))$ истинно при любом значении переменной x.
7. Элементами множеств A, P и Q являются натуральные числа, причём $P = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ и $Q = \{2, 6, 12, 18, 24\}$. Известно, что выражение $(x \in Q) \to (\overline{(x \in A)} \to \overline{(x \in P)})$ истинно при любом значении переменной x. Определите наименьшее возможное количество элементов множества A.

*8. На числовой прямой даны два отрезка: $M = [10;\ 60]$ и $N = [40;\ 80]$. Укажите наименьшую возможную длину такого отрезка A, что выражение $(x \in M) \to (((x \in N) \& \overline{(x \in A)}) \to \overline{(x \in M)})$ истинно при любом значении переменной x.

9. Для какого наименьшего неотрицательного целого десятичного числа A формула $x \& 25 \neq 0 \to (x \& 17 = 0 \to x \& A \neq 0)$ тождественно истинна, т. е. принимает значение 1 при любом неотрицательном целом значении десятичной переменной x? (Здесь & — поразрядная конъюнкция двух неотрицательных целых десятичных чисел.)

*10. Определите наибольшее натуральное десятичное число A, при котором выражение $((x \mathbin{\&} 46 = 0) \vee (x \mathbin{\&} 18 = 0)) \to$ $\to ((x \mathbin{\&} 115 \neq 0) \vee (x \mathbin{\&} A = 0))$ тождественно истинно, т. е. принимает значение 1 при любом натуральном значении десятичной переменной x. (Здесь & — поразрядная конъюнкция двух неотрицательных целых десятичных чисел.)

11. Сколько различных решений имеет система уравнений:

1) $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 \to x_3 \cdot x_4 = 1; \\ \bar{x}_3 + \bar{x}_4 + x_5 \cdot x_6 = 1. \end{cases}$

2) $\begin{cases} \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_3 \cdot x_4 = 1; \\ \bar{x}_3 + \bar{x}_4 + x_5 \cdot x_6 = 1; \\ \bar{x}_5 + \bar{x}_6 + x_7 \cdot x_8 = 1; \\ \bar{x}_7 + \bar{x}_8 + x_9 \cdot x_{10} = 1. \end{cases}$

12. Сколько существует различных логических функций от четырёх переменных?

13. По заданной таблице истинности составьте логические выражения для функций F_1, F_2.

A	B	F_1	F_2
0	0	1	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1

14. По известным таблицам истинности запишите аналитическое представление импликации, эквиваленции и строгой дизъюнкции.

15. Логические функции штрих Шеффера и стрелка Пирса названы так в честь математиков, исследовавших их свойства. Подготовьте краткую биографическую справку об одном из этих учёных.

16. По заданной таблице истинности составьте логические выражения для функций F_1, F_2.