5-7 класс

Задача 7.1.(6.1) Старинная пословица.

Путь в тысячу *ли* начинается с первого шага (китайская пословица).
Путь в тысячу *ри* начинается с первого шага (японская пословица).

Китайские единицы измерения в древности были заимствованы японцами. Так, единица «ли», использовавшаяся для измерения больших расстояний, превратилась в «ри», а «чи», употреблявшаяся для измерения малых расстояний, стала называться «сяку» (иероглифы одни и те же). Однако с течением времени определение японских и китайских единиц изменилось. Известно, что в современном Китае 1 ли = 1500 чи, а в Японии 1 ри = 36 тё, 1 тё = 360 сяку. Насколько бóльший путь (в километрах) описан в японском варианте пословицы по сравнению с китайским, если 33 сяку = 10 м, а 1 м = 3 чи?

Ответ: 3427 км.

Решение: Определим сначала величину 1 ли в метрах:

$$1 \text{ ли} = 1500 \text{ чи},\ 1 \text{ чи} = \frac{1}{3} \text{ м} \quad \Rightarrow \quad 1 \text{ ли} = 1500 \cdot \frac{1}{3} \text{ м} = 500 \text{ м}.$$

Теперь вычислим, чему равен 1 ри:

$$1 \text{ ри} = 36 \times 360 \text{ сяку} = 12960 \text{ сяку},\ 1 \text{ сяку} = \frac{10}{33} \text{ м} \quad \Rightarrow \quad 1 \text{ ри} = 12960 \cdot \frac{10}{33} \text{ м} \approx 3927 \text{ м}.$$

Следовательно, длина пути в 1000 ли равна 500 км, а пути в 1000 ри — 3927 км. Разность составляет 3427 км.

Критерии:

Найдено значение 1 ли в метрах	3 балла
Найдено значение 1 ри в метрах	4 балла
Найдена длина пути в 1000 ли (в километрах)	1 балл
Найдена длина пути в 1000 ри (в километрах)	1 балл
Найдена разность путей	1 балл

Задача 7.2.(6.2) Трансокеанские перелёты.

Самолёт авиакомпании «Qantas» вылетел из Лос-Анджелеса в среду в 22:40 и приземлился в Сиднее в 8:40 пятницы. Обратный рейс вылетел тем же днём в 11:40 и вернулся в Лос-Анджелес в 6:10 в пятницу. Какова разница между местным временем Сиднея и Лос-Анджелеса, если в первом случае средняя скорость самолёта была на 10% меньше, чем во втором? Время вылета и прилёта самолёта везде указано местное. Расстояние, которое пролетает самолёт туда и обратно, считать одинаковым.

Ответ: 19 ч.

Решение: Пусть местное время в Сиднее отличается на T от местного времени в Лос-Анджелесе. Самолёт взлетел в 22:40 в среду, а приземлился в 8:40 в пятницу. Без учёта сдвига часовых поясов, разница составляет 34 часа, поэтому время полёта равно $t_1 = 34$ ч $- T$. При полёте в обратном направлении время, как кажется, идёт назад (на 5,5 часов). Следовательно, обратный перелёт длился $t_2 = T - 5{,}5$ ч.

Скорость самолёта в первом случае была на 10% меньше, поэтому время в пути из Лос-Анджелеса в Сидней было в 10/9 раз больше, чем во втором случае:

$$t_1 = \frac{10\,t_2}{9} \quad \Rightarrow \quad 34 \text{ ч} - T = \frac{10}{9}(T - 5{,}5 \text{ ч}) \quad \Rightarrow \quad T = 19 \text{ ч}.$$

Критерии:

Записано выражение для времени полёта в первом случае . . . . 2 балла
Записано выражение для времени полёта в втором случае . . . . 2 балла
Указано, что $t_1 = 10\,t_2/9$, или на аналогичное соотношение . . . . 2 балла
Записано уравнение для определения T . . . . 2 балла
Найдено T . . . . 2 балла

Задача 7.3.(6.3) Перекус Карлсона.

Карлсон получил в подарок от своей бабушки большую банку варенья. До приезда телевидения оставалось 1,5 часа, и он решил подкрепиться. Первую половину содержимого Карлсон съел со скоростью 9 ложек в минуту. Потом позвонил Малыш, и Карлсон в течение получаса, отвлекаясь на разговор, стал есть со скоростью 4 ложки в минуту. Когда друзья наговорились, оказалось, что в банке осталась треть от её первоначального содержимого. С какой минимальной скоростью Карлсон должен есть оставшуюся часть варенья, чтобы успеть закончить еду к приезду телевидения?

Ответ: 12 ложек в минуту.

Решение: Во время разговора с Малышом Карлсон съел

$$4\,\frac{\text{ложки}}{\text{мин}} \times 30\text{ мин} = 120\text{ ложек варенья.}$$

Так как в начале он съел половину, а в конце осталась треть банки, то во время разговора он осилил 1/6 всего содержимого. Отсюда получаем, что вся банка содержала $120\times 6 = 720$ ложек варенья.

На поедание первой половины Карлсон потратил

$$t_1 = \frac{360\text{ ложек}}{9\text{ ложек/мин}} = 40\text{ мин.}$$

Поэтому до приезда телевидения у него осталось $t_3 = 90\text{ мин} - 40\text{ мин} - 30\text{мин} = 20$ мин. За это время ему нужно съесть треть банки, то есть 240 ложек. Следовательно, скорость, с которой ему нужно это делать, равна

$$\frac{240\text{ ложек}}{20\text{ мин}} = 12\,\frac{\text{ложек}}{\text{мин}}.$$

Критерии:

Найдено количество варенья, съеденного во время разговора (120 ложек) . . . . 2 балла
Найдено количество ложек во всей банке . . . . 2 балла
Найдено время на поедание первой половины банки . . . . 2 балла
Найдено время на поедание последней трети . . . . 2 балла
Найдена скорость поедания последней трети . . . . 2 балла

Задача 7.4. Интервью Карлсона.

Во время своего интервью городскому телевидению Карлсон вспомнил про один случай. Както раз, сидя на краю крыши, он увидел внизу жулика, выбегающиего из подъезда дома со скоростью 7 м/с. Карлсон не растерялся, сразу же спикировал вертикально вниз со скоростью 15 м/с, погнался за негодяем и догнал его. Ещё Карлсон заметил, что скорость его горизонтального полёта была равна 10 м/с, а высота, с которой он пикировал, составила 27 м. На каком расстоянии от подъезда Карлсон догнал жулика? Сколько времени прошло от момента обнаружения жулика до его поимки? Считать, что жулик убегал по прямой.

Ответ: 42 м, 6 с.

Решение: Пусть Карлсон догнал жулика на расстоянии s от подъезда. Тогда время, которое длилась погоня, равно $t = s/(7\ \text{м/с})$. С другой стороны, Карлсон пикировал вниз в течение $t_1 = 27\ \text{м}/(15\ \text{м/с}) = 1{,}8$ с и гнался за жуликом, летя горизонтально, в течение времени $t_2 = s/(10\ \text{м/с})$. Так как $t = t_1 + t_2$, получаем уравнение

$$\frac{s}{7\ \text{м/с}} = 1{,}8\ \text{с} + \frac{s}{10\ \text{м/с}} \quad\Rightarrow\quad s\left(\frac{1}{7\ \text{м/с}} - \frac{1}{10\ \text{м/с}}\right) = 1{,}8\ \text{с} \quad\Rightarrow\quad s = \frac{1{,}8}{1/7 - 1/10}\ \text{м} = 42\ \text{м}.$$

Соотвественно, время погони равно $t = 42\ \text{м}/(7\ \text{м/с}) = 6$ с.

Критерии:

Найдено время пикирования t_1 . . . . 1 балл
Записано выражение для времени t . . . . 2 балла
Записано выражение для времени t_2 . . . . 2 балла
Записано уравнение для нахождения s . . . . 1 балл
Найдено расстояние s . . . . 3 балла
Вычислено время t . . . . 1 балл

Максимально возможный балл в 5-6 классе 30
Максимально возможный балл в 7 классе 40

8 класс

Задача 8.1. Средняя скорость.

Автомобиль ехал из Аистово в Ведёркино через деревню Борисово. На участке между Аистово и Борисово он двигался со скоростью, вдвое большей его средней скорости на всём пути. На участке Борисово–Ведёркино его скорость упала и составила половину от средней скорости. Какую долю всего пути от Аистово до Ведёркино составил первый участок?

Ответ: 2/3.

Решение: Пусть v — средняя скорость автомобиля на всём пути, s_1 — расстояние между Аистово и Борисово, а s_2 — расстояние от Борисово до Ведёркино. Время, которое он потратил на первом участке, равно $t_1 = s_1/(2v)$, а на втором — $t_2 = s_2/(v/2) = 2s_2/v$. С другой стороны, общее время в пути равно $t = (s_1 + s_2)/v$. Отсюда получаем, что

$$t = t_1 + t_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{s_1 + s_2}{v} = \frac{s_1}{2v} + \frac{2s_2}{v} \quad \Rightarrow \quad s_1 + s_2 = \frac{s_1}{2} + 2s_2 \quad \Rightarrow \quad s_1 = 2s_2.$$

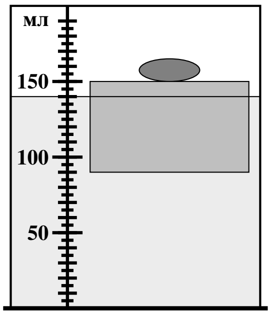
Так как весь путь, в этом случае, равен $s_1 + s_2 = 3s_2$, находим, что первый участок составляет 2/3 всего пути.

Критерии:

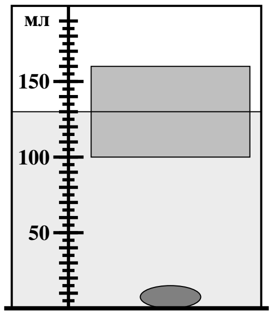
Записано правильное выражение для t_1 . . . . 2 балла
Записано правильное выражение для t_2 . . . . 2 балла
Записано правильное выражение для t . . . . 2 балла
Найдена связь между s_1 и s_2 . . . . 2 балла
Найдено, что s_1 составляет 2/3 всего пути . . . . 2 балла

Задача 8.2. Брусок в мерном сосуде.

В мерном сосуде с водой находится деревянный брусок, на котором лежит металлическая деталь массой 12 г (см. рис. 8.1а). Деталь скатилась и упала на дно сосуда (рис. 8.1б). Определите **с помощью рисунков** объём бруска и плотность материала, из которого сделана деталь. Плотность воды равна 1000 кг/м^3. Брусок имеет форму прямоугольного параллелепипеда.



а)



б)

Рис. 8.1.

Ответ: 36 см^3, 6000 кг/м^3.

Решение: По шкале мерного сосуда определяем, что в первом случае брусок погружен в воду на 5/6 своего объёма, а во втором случае — наполовину. С другой стороны, уровень воды в сосуде опустился с отметки «140 мл» до «130 мл». Это значит, что объём погруженной части в первом случае на 10 мл = 10 см^3 больше, чем во втором. Пусть $V_б$ — объём бруска, а V — объём детали. Тогда

$$10 \text{ см}^3 = \frac{5V_б}{6} - \left(\frac{V_б}{2} + V\right) = \frac{V_б}{3} - V.$$

Запишем теперь условия плавания бруска в каждом случае (m — масса детали, $\rho_д$ — плотность дерева):

$$mg + \rho_д g V_б = \rho_в g \cdot \frac{5V_б}{6} \qquad \text{(первый случай)},$$

$$\rho_д g V_б = \rho_в g \cdot \frac{V_б}{2} \qquad \text{(второй случай)}.$$

Отсюда находим, что

$$mg = \rho_в g V_б/3 \quad \Rightarrow \quad V_б = \frac{3m}{\rho_в} = 36\ \text{см}^3.$$

Объём детали, соотвественно, равен

$$V = \frac{V_б}{3} - 10\ \text{см}^3 = 2\ \text{см}^3.$$

Исходя из этого, определяем плотность материала детали:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{12\ \text{г}}{2\ \text{см}^3} = 6\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3}.$$

Критерии:

По рисункам определены погруженные части бруска в обоих случаях . . . . 2 балла
Записаны условия плавания . . . . 2 балла
Найден объём бруска . . . . 2 балла
Найден объём детали . . . . 3 балла
Вычислена плотность детали . . . . 1 балл

Задача 8.3. Переливание воды.

В двух одинаковых алюминиевых калориметрах находится в тепловом равновесии вода: в первом — 60 г при температуре 10 ℃, во втором — 40 г при температуре 80 ℃. Воду из второго калориметра переливают в первый калориметр, после чего температура воды в нём становится равной 36 ℃. Какова масса калориметра? Удельная теплоёмкость воды равна 4200 Дж/(кг·℃), алюминия — 920 Дж/(кг·℃). Теплообменом с окружающей средой пренебречь.

Ответ: 35 г.

Решение: Пусть m_1 — масса воды в первом калориметре, m_2 — масса воды во втором, а M — масса самого калориметра. Горячая вода отдаёт количество теплоты, равное

$$Q_{отд} = c_в m_2 (80\,℃ - 36\,℃) = 4200\ \text{Дж/(кг·℃)} \cdot 0{,}04\ \text{кг} \cdot 44\,℃ = 7392\ \text{Дж}.$$

Оно идёт на нагрев до 36 ℃ первого калориметра и воды в нём. Запишем уравнение теплового баланса:

$$Q_{пол} = Q_{отд} \quad \Rightarrow \quad c_в m_1 (36\,℃ - 10\,℃) + c_{ал} M (36\,℃ - 10\,℃) = 7392\ \text{Дж}.$$

Отсюда получаем, что

$$c_{ал} M \cdot 26\,℃ = 7392\ \text{Дж} - c_в m_1 \cdot 26\,℃ = 7392\ \text{Дж} - 4200\ \text{Дж/(кг·℃)} \cdot 0{,}06\ \text{кг} \cdot 26\,℃ =$$

$$= 7392\ \text{Дж} - 6552\ \text{Дж} = 840\ \text{Дж} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad M = \frac{840\ \text{Дж}}{c_{ал} \cdot 26\,℃} = \frac{840\ \text{Дж}}{920\ \text{Дж/(кг·℃)} \cdot 26\,℃} \approx 0{,}035\ \text{кг}.$$

Критерии:

Записано выражение для $Q_{отд}$ . . . . 2 балла

Записано выражение для $Q_{пол}$ . . . . 3 балла
Записано уравнение для нахожения M (уравнение теплового баланса) . . . . 3 балла
Найдена масса калориметра . . . . 2 балла

Задача 8.4. Сплошной и полый.
На концах невесомого рычага подвешены два алюминиевых шарика одинакового объёма: один сплошной, а другой — полый (рис. 8.2). Оба шарика полностью погружены в воду. Какую долю объёма полого шарика занимает его полость? Плотность алюминия равна 2700 кг/м^3, плотность воды — 1000 кг/м^3. Для удобства рычаг разделён штрихами на 7 равных частей.

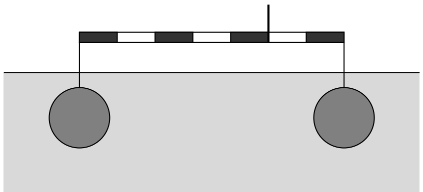


Рис. 8.2.

Ответ: 17/45 ≈ 38%.

Решение: Пусть V — полный объём шарика, а $V_{ст}$ — объём стенок у того шарика, что имеет полость (то есть, у левого). Запишем выражение для веса шариков в воде:

$$P_л = m_л g - \rho_в g V = \rho_{ал} g V_{ст} - \rho_в g V \qquad \text{(левый шарик)},$$

$$P_п = m_п g - \rho_в g V = (\rho_{ал} - \rho_в) g V \qquad \text{(правый шарик)}.$$

Согласно правилу моментов, вéсы в воде левого и правого шарика относятся как 2 : 5. Отсюда получаем, что

$$5P_л = 2P_п \quad \Rightarrow \quad 5(\rho_{ал} g V_{ст} - \rho_в g V) = 2(\rho_{ал} - \rho_в) g V \quad \Rightarrow \quad 5\rho_{ал} V_{ст} = (2\rho_{ал} + 3\rho_в)V \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad V_{ст} = \frac{(2\rho_{ал} + 3\rho_в)V}{5\rho_{ал}} = \frac{(2 \cdot 2700 + 3 \cdot 1000)V}{5 \cdot 2700} = \frac{28V}{45}.$$

Следовательно, объём полости составляет $V_{пол} = V - V_{ст} = 17V/45 \approx 0{,}38V$.

Критерии:
Записано выражение для веса в воде левого шарика . . . . 3 балла
Записано выражение для веса в воде правого шарика . . . . 2 балла
Записано правило моментов . . . . 2 балла
Найдено $V_{пол}/V$ . . . . 3 балла

Максимально возможный балл в 8 классе 40

9 класс

Задача 9.1. Водоплавающий алюминий.

Для того, чтобы удержать полый алюминиевый шарик объёмом 162 $см^3$ полностью погружённым в воду, нужно на него **давить вниз** с силой, вдвое большей веса этого шарика в воздухе. Каков объём полости шарика? Плотность алюминия равна 2700 кг/$м^3$, плотность воды — 1000 кг/$м^3$.

Ответ: 142 $см^3$.

Решение: Пусть V — полный объём шарика, а $V_{ст}$ — объём его стенок. Вес шарика в воздухе равен

$$P_{возд} = mg = \rho_{ал} g V_{ст}.$$

Сила, которую нужно приложить к шарику, чтобы удержать его под водой, равна разности действующих на него силы Архимеда и силы тяжести:

$$F = \rho_в g V - mg = \rho_в g V - \rho_{ал} g V_{ст}.$$

По условию, $F = 2P_в$, следовательно,

$$\rho_в g V - \rho_{ал} g V_{ст} = 2\rho_{ал} g V_{ст} \quad \Rightarrow \quad \rho_в g V = 3\rho_{ал} g V_{ст} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad V_{ст} = \frac{\rho_в V}{3\rho_{ал}} = \frac{1\ г/см^3 \cdot 162\ см^3}{3 \cdot 2{,}7\ г/см^3} = 20\ см^3.$$

Отсюда находим, что $V_{пол} = V - V_{ст} = 142\ см^3$.

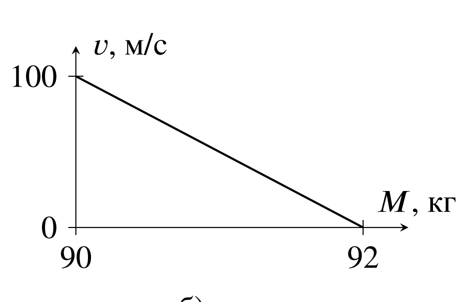
Критерии:

Записано выражение для веса в воздухе . . . . 1 балл
Записано выражение для силы F . . . . 4 балла
Найден объём стенок . . . . 3 балла
Найден объём полости . . . . 2 балла

Задача 9.2. После карантина.

Супермен, навестив свою бабушку и захватив с собой корзину с пирожками, полетел обратно домой (рис. 9.1а). В полёте он непрерывно поедал гостинцы со скоростью 2 пирожка в минуту, отчего скорость его полёта постепенно уменьшалась. График зависимости скорости полёта Супермена v от массы его тела M приведён на рис. 9.1б. Какое максимальное расстояние сможет пролететь супергерой, если масса Супермена перед вылетом от бабушки равна 90 кг, а масса одного пирожка равна $m = 80$ г?

а)



б)

Рис. 9.1.

Ответ: 37,5 км.

Решение: Так как Супермен ест пирожки с постоянной скоростью, его масса линейно возрастает со временем. Из это следует, что движение героя является равнозамедленным. Найдём время всего полёта Супермена:

$$t = \frac{2\text{ кг}}{0{,}08\text{ кг} \cdot 2\text{ шт/мин}} = 12{,}5\text{ мин} = 750\text{ с}.$$

Вариант решения №1. Определим модуль ускорения Супермена:

$$a = \frac{v_{max}}{t} = \frac{100\text{ м/с}}{750\ c} = \frac{2}{15}\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Отсюда получаем, что до своей остановки герой пролетел

$$s = \frac{v_{max}^2}{2a} = \frac{(100\text{ м/с})^2}{2 \cdot 2/15\text{ м/с}^2} = 37500\text{ м}.$$

Вариант решения №2. Определим расстояние, пройденное Суперменом, как площадь под графиком зависимости скорости от времени:

$$s = \frac{(v_{max} + 0)t}{2} = \frac{1}{2} \cdot 100\text{ м/с} \cdot 750\text{ с} = 37500\text{ м}.$$

Критерии:

Вариант №1

Обосновано, что Супермен движется с постоянным ускорением . . . . 3 балла
Найдено время движения . . . . 2 балла
Найдено ускорение . . . . 2 балла
Найдено пройденное расстояние . . . . 3 балла

Вариант №2

Обосновано, что Супермен движется с постоянным ускорением . . . . 3 балла
Найдено время движения . . . . 2 балла
Найдено пройденное расстояние . . . . 5 баллов

Задача 9.3. Пять резисторов.

Цепь, изображённая на рис. 9.2, состоит из пяти одинаковых резисторов, источника постоянного напряжения и амперметра с вольтметром. Определите напряжение источника U_0 и сопротивление R, если амперметр показывает 20 мА, а вольтметр — 4,5 В. Все приборы считать идеальными.

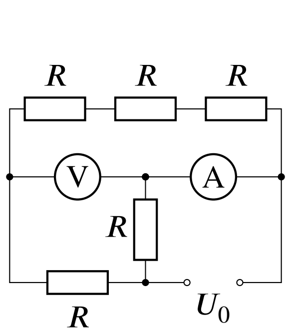


Рис. 9.2.

Ответ: 6 В, 300 Ом.

Решение: Поскольку идеальный амперметр имеет нулевое сопротивление, а идеальный вольтметр — бесконечное, то в цепи, изображённой на рис. 9.2, вертикальный резистор включён параллельно источнику, левый нижний резистор — последовательно остальным трём, а все они вчетвером — тоже параллельны источнику. Вольтметр, при этом, показывает напряжение на трёх верхних резисторах.

Для удобства перерисуем цепь (рис. 9.3). Пусть I_A — сила тока, текущего через амперметр. Тогда $U_0 = I_A R$, а ток в верхней части цепи, соответственно, равен $I_2 = U_0/(4R) = I_A/4$. Напряжение, которое показывает вольтметр, равно

$$U_V = I_2 \cdot 3R = \frac{3}{4} I_A R = \frac{3}{4} U_0.$$

Так как $U_V = 4{,}5$ В, получаем, что $U_0 = 4U_V/3 = 6$ В. Отсюда следует, что

$$R = \frac{U_0}{I_A} = \frac{6\text{ В}}{0{,}02\text{ А}} = 300\text{ Ом}.$$

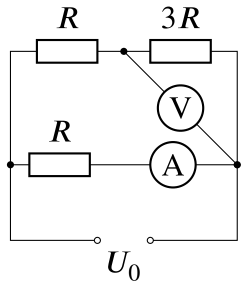


Рис. 9.3.

Критерии:

Записана формула $U_0 = I_A R$ . . . . 2 балла
Получена связь между U_V и U_0 . . . . 5 баллов
Найдено напряжение U_0 . . . . 1 балл
Найдено сопротивление R . . . . 2 балла

Задача 9.4. Двусоставный стержень.

Стержень постоянного сечения, одна часть которого изготовлена из дерева, а другая из чугуна, уравновешен на опоре. Длина деревянной части стержня равна 1,5 м, длина чугунной — 10 см. На каком расстоянии от места соединения двух частей должна находиться опора? Плотность дерева равна 700 кг/м^3, плотность чугуна — 7000 кг/м^3.

Ответ: 43 см.

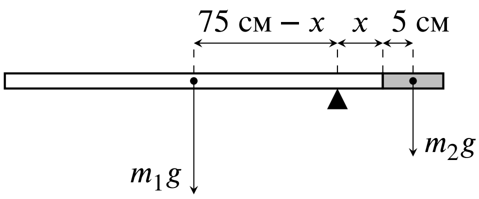


Рис. 9.4.

Решение: Пусть x — искомое расстояние. Сделаем рисунок (рис. 9.4) и запишем правило моментов относительно точки опоры:

$$m_1 g(75\text{ см} - x) = m_2 g(x + 5\text{ см}),$$

где m_1 — масса деревянной части, а m_2 — масса чугунной. Если S — площадь поперечного сечения, то

$$m_1 = \rho_д S \cdot 150\text{ см}, \qquad m_2 = \rho_ч S \cdot 10\text{ см}.$$

Подставим эти выражения в уравнение:

$$\rho_д S \cdot 150\text{ см} \cdot g(75\text{ см} - x) = \rho_ч S \cdot 10\text{ см} \cdot g(x + 5\text{ см}) \Rightarrow \rho_д \cdot 15 \cdot (75\text{ см} - x) = \rho_ч \cdot (x + 5\text{ см}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0{,}7\text{ г/см}^3 \cdot 15 \cdot (75\text{ см} - x) = 7\text{ г/см}^3 \cdot (x + 5\text{ см}) \Rightarrow x = 43\text{ см}.$$

Критерии:

Записано выражение для m_1 . . . . 1 балл
Записано выражение для m_2 . . . . 1 балл
Записано правило моментов . . . . 5 баллов
Найдена величина x . . . . 3 балла

Задача 9.5. Переливание воды-2.
У мальчика Паши есть два одинаковых калориметра. В первом из них находится в тепловом равновесии 25 г льда при температуре 0 ℃, а во втором — 50 г воды при температуре 60 ℃. Воду из второго калориметра он перелил в первый калориметр, и в нём установилась температура 10 ℃. После этого Паша повторил эксперимент с теми же количествами льда и воды при тех же начальных условиях, но теперь пересыпав лёд из первого калориметра во второй. Какая температура установится во втором калориметре в этом случае? Удельная теплоёмкость воды равна 4200 Дж/(кг·℃), удельная теплота плавления льда — 330 кДж/кг. Теплообменом с окружающей средой пренебречь.

Ответ: 26,6 ℃.

Решение: Пусть C — теплоёмкость калориметра. Запишем уравнение теплового баланса для первого эксперимента:

$$C\cdot(10\,℃-0\,℃)+\lambda\cdot 25\text{ г}+c_\text{в}\cdot 25\text{ г}\cdot(10\,℃-0\,℃)=c_\text{в}\cdot 50\text{ г}\cdot(60\,℃-10\,℃).$$

Подставляя табличные данные, находим, что

$$C\cdot 10\,℃+8250\text{ Дж}+1050\text{ Дж}=10500\text{ Дж}\quad\Rightarrow\quad C=120\text{ Дж/℃}.$$

Запишем теперь уравнение теплового баланса для второго эксперимента. Пусть t — конечная температура в калориметре. Тогда

$$C\cdot(60\,℃-t)+c_\text{в}\cdot 50\text{ г}\cdot(60\,℃-t)=\lambda\cdot 25\text{ г}+c_\text{в}\cdot 25\text{ г}\cdot(t-0\,℃).$$

Отсюда находим t:

$$(C+c_\text{в}\cdot 50\text{ г})\cdot 60\,℃-\lambda\cdot 25\text{ г}=(c_\text{в}\cdot 25\text{ г}+c_\text{в}\cdot 50\text{ г}+C)\cdot t\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad t=\frac{(C+c_\text{в}\cdot 50\text{ г})\cdot 60\,℃-\lambda\cdot 25\text{ г}}{c_\text{в}\cdot 75\text{ г}+C}=\frac{19800\text{ Дж}-8250\text{ Дж}}{435\text{ Дж/℃}}\approx 26{,}6\,℃.$$

Критерии:

Записано уравнение теплового баланса в первом случае . . . . 3 балла
Найдена теплоёмкость калориметра или аналогичный параметр . . . . 2 балла
Записано уравнение теплового баланса во втором случае . . . . 3 балла
Найдено значение установившейся температуры . . . . 2 балла

Максимально возможный балл в 9 классе 50

10 класс

Задача 10.1. Кидаем вверх.

С какой начальной скоростью нужно бросить вертикально вверх тело, чтобы модуль его перемещения за первую секунду и за первые две секунды (от момента броска) был одинаковым? Рассмотрите все возможные варианты. Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2.

Ответ: 15 м/с или 8,3 м/с.

Решение: Пусть v — начальная скорость тела. Запишем выражения для перемещения тела за 1 с и за 2 с от момента броска:

$$s_1 = v \cdot 1\text{ с} - \frac{g(1\text{ с})^2}{2}, \qquad s_2 = v \cdot 2\text{ с} - \frac{g(2\text{ с})^2}{2}.$$

В первом случае, когда $s_1 = s_2$, получаем

$$v \cdot 1\text{ с} - \frac{g(1\text{ с})^2}{2} = v \cdot 2\text{ с} - \frac{g(2\text{ с})^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v \cdot 1\text{ с} - 5\text{ м} = v \cdot 2\text{ с} - 20\text{ м} \quad \Rightarrow \quad v = 15\text{ м/с}.$$

Во втором случае $s1 = -s2$, поэтому

$$v \cdot 1\text{ с} - \frac{g(1\text{ с})^2}{2} = -v \cdot 2\text{ с} + \frac{g(2\text{ с})^2}{2} \Rightarrow v \cdot 1\text{ с} - 5\text{ м} = -v \cdot 2\text{ с} + 20\text{ м} \Rightarrow v = \frac{25}{3}\text{ м/с} \approx 8{,}3\text{ м/с}.$$

Критерии:

Записано выражение для перемещения за 1 с . . . . 1 балл
Записано выражение для перемещения за 2 с . . . . 1 балл
Найдена начальная скорость в случае $s_1 = s_2$ . . . . 3 балла
Найдена начальная скорость в случае $s_1 = -s_2$ . . . . 5 баллов

Задача 10.2. На дне и на плаву.

Два сплошных кубика, связанных нитью, находятся в неизвестной жидкости (рис. 10.1). Верхний кубик сделан из дерева с плотностью 600 кг/м^3 и погружен в жидкость на 3/4 своего объёма. Нижний кубик сделан из стали (плотность 7800 кг/м^3), и длина его ребра в два раза меньше длины ребра верхнего. Определите плотность неизвестной жидкости, если сила давления нижнего кубика на дно в 1,75 раз больше силы натяжения нити. Нить считать невесомой и нерастяжимой.

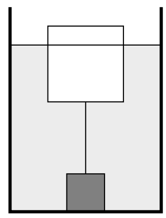


Рис. 10.1.

Ответ: 1200 кг/м^3.

Решение: Пусть T — сила натяжения нити. Тогда сила давления нижнего кубика на дно, а следовательно, и сила, с которой дно действует на нижний кубик, равна $7T/4$. Запишем условия равновесия кубиков, учитывая, что объём верхнего равен V, а нижнего — $V/8$:

$$\rho_{ж} g \cdot 3V/4 = \rho_{д} gV + T \qquad \text{(верхний кубик)},$$

$$T + 7T/4 + \rho_{ж} g \cdot V/8 = \rho_{ст} g \cdot V/8 \qquad \text{(нижний кубик)}.$$

Преобразуя их, получим

$$\begin{cases} \left(3\rho_{ж}/4 - \rho_{д}\right) gV = T, \\ \left(\rho_{ст} - \rho_{ж}\right) gV/8 = 11T/4. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \rho_{ст} - \rho_{ж} = 22\left(3\rho_{ж}/4 - \rho_{д}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{35}{2}\rho_{ж} = \rho_{ст} + 22\rho_{д} \quad \Rightarrow \quad \rho_{ж} = \frac{2}{35}\left(\rho_{ст} + 22\rho_{д}\right) = 1200\text{ кг/м}^3.$$

Критерии:

Записано первое условие равновесия . . . 3 балла
Записано второе условие равновесия . . . 3 балла
Найдена плотность неизвестной жидкости . . . 4 балла

Задача 10.3. Бусинка на пружине.
Бусинка массой $m = 10$ г, находящаяся на гладкой горизонтальной поверхности, вращается вокруг вертикальной оси O, с которой она соединена с помощью невесомой пружины жёсткости $k = 64$ Н/м (на рис. 10.2 изображён вид сверху). Какое количество оборотов **за минуту** делает бусинка, если её скорость равна $v = 8$ м/с, а длина пружины в нерастянутом состоянии $L = 15$ см? Сопротивление воздуха не учитывать.

Ответ: 382.

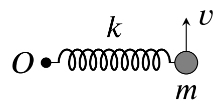


Рис. 10.2.

Решение: Допустим, во время вращения пружина растянулась на x. Тогда сила упругости, обеспечивающая центростремительное ускорение, равна kx, а радиус окружности, по которой движется бусинка, равен $L + x$. Запишем 2й закон Ньютона для бусинки:

$$\frac{mv^2}{L+x} = kx \quad \Rightarrow \quad x(L+x) = \frac{mv^2}{k} = \frac{0{,}01\ \text{кг} \cdot (8\ \text{м/с})^2}{64\ \text{Н/м}} = 0{,}01\ \text{м}^2.$$

Решая полученное уравнение и отбрасывая отрицательный корень, находим x:

$$x(0{,}15\ \text{м} + x) = 0{,}01\ \text{м}^2 \quad \Rightarrow \quad x = 0{,}05\ \text{м}.$$

Чтобы найти количество оборотов, сделанных бусинкой, разделим путь, пройденный ею за 60 с, на длину описываемой окружности

$$N = \frac{v \cdot 60\ \text{с}}{2\pi(L+x)} = \frac{8\ \text{м/с} \cdot 60\ \text{с}}{6{,}28 \cdot 0{,}2\ \text{м}} \approx 382.$$

Критерии:

Записан 2й закон Ньютона . . . 3 балла
Найдено удлинение пружины . . . 3 балла
Записано верное выражение для количества оборотов . . . 3 балла
Найдено числовое значение N . . . 1 балл

Задача 10.4. Лёд под поршнем.
В теплоизолированном цилиндрическом сосуде под поршнем находится смесь воды и льда при температуре 0 ℃ (рис. 10.3). Вблизи дна сосуда находится нагревательный элемент. Какова его мощность P, если в процессе работы нагревателя поршень опускается со скоростью $v = 2$ мм/мин? Площадь поршня $S = 100\ \text{см}^2$. Плотность воды равна 1000 кг/м^3, льда — 900 кг/м^3, удельная теплота плавления льда — 330 кДж/кг. Поршень прилегает вплотную к поверхности воды.

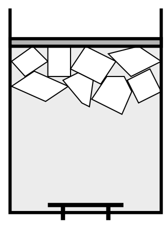


Рис. 10.3.

Ответ: 990 Вт.

Решение: Поршень опускается из-за того, что лёд при плавлении «сжимается», превращаясь в воду. Пусть нагреватель мощностью P работал в течение времени t. За это время расплавится лёд массой $m = Pt/\lambda$. Объём содержимого при этом уменьшится на

$$\Delta V = \frac{m}{\rho_л} - \frac{m}{\rho_в} = \frac{Pt}{\lambda} \cdot \frac{(\rho_в - \rho_л)}{\rho_в \rho_л}.$$

С другой стороны, $\Delta V = vtS$. Приравнивая, получаем, что

$$vtS = \frac{Pt}{\lambda} \cdot \frac{(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}})}{\rho_{\text{в}}\rho_{\text{л}}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad P = \frac{vS\lambda\rho_{\text{в}}\rho_{\text{л}}}{\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}}} = \frac{0{,}002}{60}\ \text{м/с} \cdot \frac{0{,}01\ \text{м}^2 \cdot 330000\ \text{Дж/кг} \cdot 1000\ \text{кг/м}^3 \cdot 900\ \text{кг/м}^3}{100\ \text{кг/м}^3} = 990\ \text{Вт}.$$

Критерии:

Найдена масса расплавившегося льда за время t . . . . 2 балла
Записано изменение объёма расплавившегося льда . . . . 2 балла
Записана связь ΔV и скорости . . . . 2 балла
Получена формула для мощности . . . . 2 балла
Получено числовое значение мощности . . . . 2 балла

Задача 10.5. Чёрный ящик.

Десятиклассник Паша исследовал «чёрный ящик», содержащий батарейку, последовательно соединённую с резистором, с помощью двух **одинаковых** вольтметров. Когда он подключил к выводам «чёрного ящика» один вольтметр (рис. 10.4а), тот показал напряжение $U_1 = 3{,}9$ В. Когда же он подключил к этим выводам ещё один вольтметр (параллельно первому, см. рис. 10.4б), то каждый из них стал показывать напряжение $U_2 = 2{,}4$ В. Какое напряжение покажут эти вольтметры, если их соединить последовательно и подключить к выводам такого «чёрного ящика» (рис. 10.4в)? Напряжение на батарейке «чёрного ящика» в течение эксперимента не изменяется.

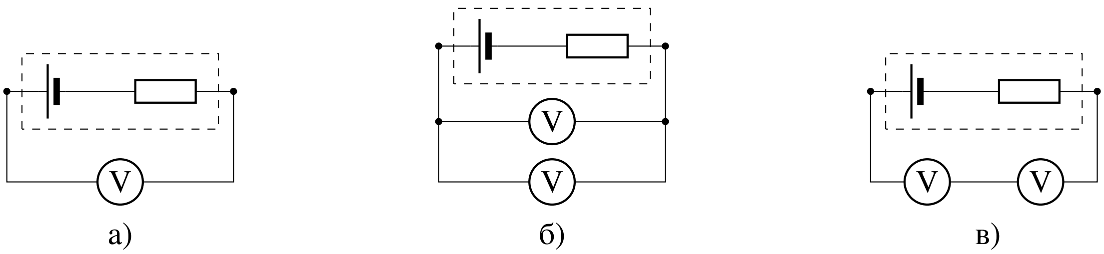


Рис. 10.4.

Ответ: 2,84 В.

Решение: Заметим, что описанная в задаче ситуация невозможна, если вольтметр идеальный. Пусть напряжение на батарейке равно U_0, сопротивление резистора внутри чёрного ящика — r, а внутреннее сопротивление вольтметра — R_V. В первом случае ток в цепи равен $I_1 = U_0/(r + R_V)$, поэтому напряжение на вольтметре $U_1 = I_1 R_V = U_0 R_V/(r + R_V)$. Во втором случае

$$U_2 = \frac{U_0 R_V/2}{r + R_V/2} = \frac{U_0 R_V}{2r + R_V}.$$

Подставим числовые значения из условия:

$$\begin{cases} U_0 R_V/(r + R_V) = 3{,}9\ \text{В}, \\ U_0 R_V/(2r + R_V) = 2{,}4\ \text{В} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{2r + R_V}{r + R_V} = \frac{39}{24} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{5R_V}{3}.$$

Отсюда получаем, что

$$U_1 = \frac{U_0 R_V}{r + R_V} = \frac{3U_0}{8} \quad \Rightarrow \quad U_0 = \frac{8U_1}{3} = 10{,}4\ \text{В}.$$

В третьем случае ток в цепи равен $I_3 = U_0/(r + 2R_V) = 3U_0/(11R_V)$. Поэтому напряжение на любом из вольтметров должно быть равно

$$U_3 = I_3 R_V = \frac{3U_0}{11} = \frac{3 \cdot 10{,}4\ \text{В}}{11} \approx 2{,}84\ \text{В}.$$

Критерии:

Записано выражение для напряжения на вольтметре в первом случае . . . . 2 балла
Записано выражение для напряжения на вольтметре во втором случае . . . . 2 балла
Найдена связь между сопротивлением в черном ящике и R_V . . . . 2 балла
Записано выражение для напряжения на батарейке (через данные в условии) . . . . . 1 балл
Найдено напряжение на вольтметре в третьем случае . . . . 3 балла

Максимально возможный балл в 10 классе 50

11 класс

Задача 11.1. Под натяжением.

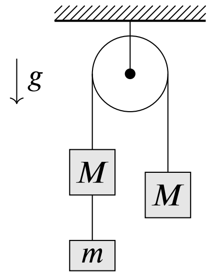


Рис. 11.1.

Через блок перекинута нить, к обоим концам которой привязаны грузы массой M. К одному из этих грузов с помощью второй нити снизу прикреплён груз массой m (см. рис. 11.1).

1. Чему должно быть равно отношение M/m, чтобы при движении системы сила натяжения нити, связывающей грузы с массами m и M, была в три раза меньше силы натяжения нити, перекинутой через блок?
2. Каково при этом ускорение грузов?

Все нити невесомы и нерастяжимы. Трением и сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: 1. $M/m = 2$; 2. $a = g/5$.

Решение: Пусть T — сила натяжения нити между грузами m и M. Тогда сила натяжения нити, перекинутой через блок, равна $3T$. Запишем 2й закон Ньютона для каждого из грузов (a — их ускорение):

$$ma = mg - T \qquad \text{(нижний левый груз)},$$

$$Ma = Mg + T - 3T \qquad \text{(верхний левый груз)},$$

$$Ma = 3T - Mg \qquad \text{(правый груз)}.$$

Из первых двух уравнений получаем

$$\begin{cases} T = m(g-a), \\ 2T = M(g-a) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 2 = \frac{M(g-a)}{m(g-a)} = \frac{M}{m}.$$

Из третьего уравнения находим, что

$$3T = M(g+a) \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2}M(g-a) = M(g+a) \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2}(g-a) = g+a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{g}{5}.$$

Критерии:

Записан 2й закон Ньютона для первого груза . . . . 2 балла
Записан 2й закон Ньютона для второго груза . . . . 2 балла
Записан 2й закон Ньютона для третьего груза . . . . 2 балла
Найдено отношение M/m . . . . 2 балла
Найдено ускорение системы . . . . 2 балла

Задача 11.2. Сложная цепь.

Электрическая цепь, изображённая на рис. 11.2, состоит из резисторов $R_1 = 100$ Ом и $R_2 = 300$ Ом, идеального источника с ЭДС $\mathscr{E} = 1{,}4$ В и двух идеальных амперметров. Определите показания этих амперметров.

Ответ: $I_1 = 2$ мА, $I_2 = 18$ мА.

Решение: Для удобства, перерисуем электрическую цепь (рис. 11.3). Сопротивление верхней ветви равно

$$R_{\text{верх}} = R_1 + \frac{R_2}{2} + R_1 = 350 \text{ Ом}.$$

Сила тока, текущего в ней через резистор R_1, следовательно, $I_{\text{верх}} = \mathscr{E}/R_{\text{верх}} = 0{,}004$ А, а первый амперметр показывает силу тока $I_1 = I_{\text{верх}}/2 = 2$ мА. Через резистор R_1 в средней ветви течёт ток $I_{\text{сред}} = \mathscr{E}/R_1 = 0{,}014$ А. Отсюда находим, что второй амперметр показывает силу тока

$$I_2 = I_{\text{верх}} + I_{\text{сред}} = 18 \text{ мА}.$$

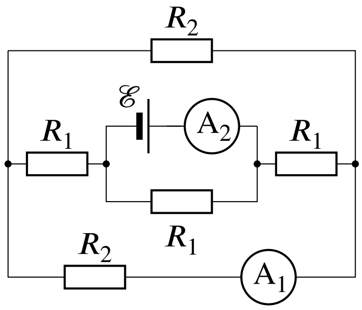


Рис. 11.2.

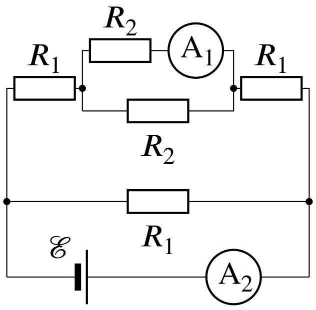


Рис. 11.3.

Критерии:

Найден ток через резистор R_1, параллельный источнику . . . . 2 балла
Найден ток через остальные резисторы R_1 . . . . 3 балла
Найдено показание первого амперметра . . . . 2 балла
Найдено показание второго амперметра . . . . 3 балла

Задача 11.3. Разность уровней.

Цилиндрическую трубку длиной $L = 30$ см, запаянную с одного конца, медленно погрузили в вертикальном положении открытым концом в сосуд со ртутью. В результате её верхний конец оказался вровень с поверхностью жидкости в сосуде (см. рис. 11.4). Определите разность уровней ртути h вне и внутри трубки? Атмосферное давление равно $p_0 = 750$ мм рт. ст. Толщиной стенок трубки пренебречь. Капиллярные эффекты не учитывать.

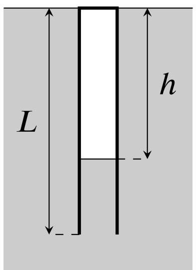


Рис. 11.4.

Ответ: 23 см.

Решение: Пусть S — площадь сечения трубки. До погружения воздух внутри трубки занимал объём SL при давлении p_0. После погружения объём воздуха стал равен Sh, а давление — $p = p_0 + \rho_{\text{рт}} gh$. Так как погружение происходит медленно, из-за хорошей теплопроводности ртути процесс можно считать изотермическим. Запишем закон Бойля–Мариотта:

$$p_0 SL = (p_0 + \rho_{\text{рт}} gh)Sh \quad \Rightarrow \quad p_0 L = (p_0 + \rho_{\text{рт}} gh)h.$$

Используя то, что $p_0 = \rho_{\text{рт}} g \cdot 75$ см, получаем

$$75 \text{ см} \cdot 30 \text{ см} = (75 \text{ см} + h)h \quad \Rightarrow \quad h^2 + 75 \text{ см} \cdot h - 75 \text{ см} \cdot 30 \text{ см} = 0.$$

Отсюда, решая уравнение и отбрасывая отрицательный корень, находим, что

$$h = \frac{-75 \text{ см} + \sqrt{(75 \text{ см})^2 + 4 \cdot 75 \text{ см} \cdot 30 \text{ см}}}{2} \approx 23 \text{ см}.$$

Критерии:

Найдено давление воздуха после погружения . . . . 2 балла
Записан закон Бойля-Мариотта . . . . 4 балла
Получено верное уравнение за величину h . . . . 2 балла
Найдено значение h . . . . 2 балла

Задача 11.4. Максимальная деформация.

На гладком горизонтальном столе покоится система из двух брусков с массами $4m$ и $2m$, связанными между собой лёгкой пружиной. Вдоль поверхности стола со скоростью v летит шарик массой m (рис. 11.5), ударяется в правый брусок и прилипает к нему. Каково максимальное сжатие пружины в процессе дальнейшего движения системы? Коэффициент жёсткости пружины равен k. Сопротивлением воздуха пренебречь.

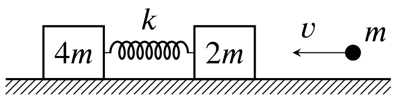


Рис. 11.5.

Ответ: $x_{max} = \sqrt{4mv^2/(21k)}$.

Решение: Сначала рассмотрим неупругое столкновение шарика и правого бруска и найдём их скорость после удара u:

$$mv = 3mu \quad \Rightarrow \quad u = \frac{v}{3}.$$

В ходе дальнейшего движения системы пружина будет сжата максимально, когда скорости брусков сравняются (обозначим эту скорость v'). Запишем закон сохранения импульса

$$3mu = (3m + 4m)v' \quad \Rightarrow \quad v' = \frac{3u}{7} = \frac{v}{7}$$

и закон сохранения энергии

$$\frac{3mu^2}{2} = \frac{(3m + 4m)(v')^2}{2} + \frac{kx_{max}^2}{2}.$$

Отсюда получаем, что

$$kx_{max}^2 = 3mu^2 - 7m(v')^2 = \frac{mv^2}{3} - \frac{mv^2}{7} = \frac{4mv^2}{21} \quad \Rightarrow \quad x_{max} = \sqrt{\frac{4mv^2}{21k}}.$$

Критерии:

Найдена скорость правого бруска с прилипшим шариком . . . . 2 балла
Указано, что максимальное сжатие пружины будет при равных скоростях брусков . . 1 балл
Найдена скорость брусков при максимальном сжатии пружины . . . . 2 балла
Записан закон сохранения энергии . . . . 3 балла
Найдено x_{max} . . . . 2 балла

Задача 11.5. Подзаряженный конденсатор.

В цепи, состоящей из последовательно соединённых батарейки с ЭДС $\mathscr{E}$, двух конденсаторов ёмкостью C и $2C$ и ключа K, ключ сначала разомкнут, а конденсатор C заряжен до напряжения $\mathscr{E}$ (полярность указана на рис. 11.6). Определите заряды, которые установятся на конденсаторах после замыкания ключа.

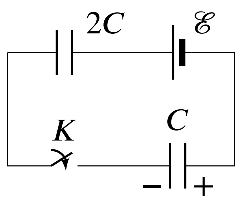


Рис. 11.6.

Ответ: $q_1 = C\mathscr{E}/3$, $q_2 = 4C\mathscr{E}/3$.

Решение: Пусть q_1 — заряд, установившийся на конденсаторе ёмкостью C, а q_2 — на конденсаторе $2C$. Сумма напряжений на них должна быть равна $\mathscr{E}$:

$$\frac{q_1}{C} + \frac{q_2}{2C} = \mathscr{E} \quad \Rightarrow \quad 2q_1 + q_2 = 2C\mathscr{E}.$$

Суммарный заряд на левых (по рисунку) обкладках конденсаторов должен остаться равным начальному заряду левой обкладки конденсатора C, то есть $-C\mathscr{E}$. Поэтому

$$q_1 + (-q_2) = -C\mathscr{E}.$$

Из полученных соотношений находим, что

$$\begin{cases} 2q_1 + q_2 = 2C\mathscr{E}, \\ q_1 - q_2 = -C\mathscr{E} \end{cases} \Rightarrow \quad q_1 = \frac{C\mathscr{E}}{3}, q_2 = \frac{4C\mathscr{E}}{3}.$$

Критерии:

Записано уравнение $q_1/C + q_2/2C = \mathscr{E}$ или его аналог . . . . 3 балл

Записано уравнение $q_1 - q_2 = -C\mathscr{E}$ . . . . 5 баллов

Найдены значения установившихся зарядов . . . . 2 балла

Максимально возможный балл в 11 классе 50